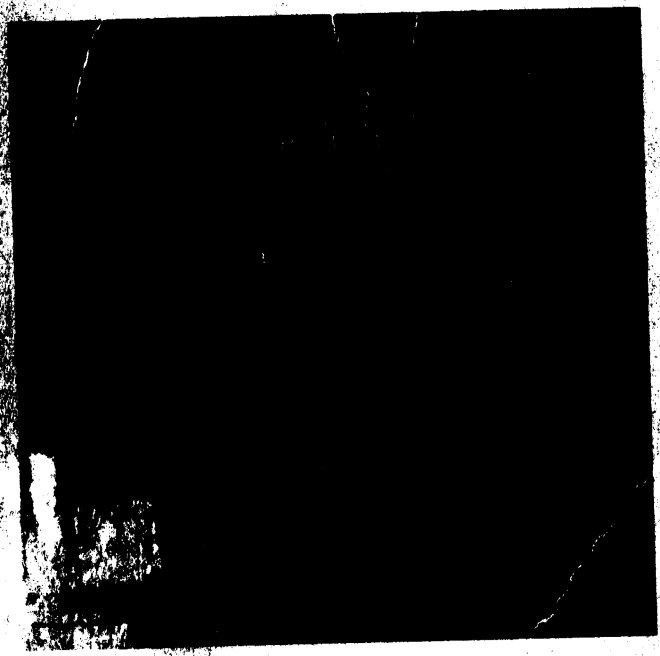
B. C. U. Timişoara
208623
965

B

LOPEDIA DE BUZUNAR

ANTON DUMITRIU

Logica polivalentă



DITURA ENCICLOPEDICĂ ROMÂNĂ

EB

ENCICLOPEDIA DE BUZUNAR

Seria „SINTEZE"

Biblioteca Centrală
Universitară
Timişoara

208523

02169303

Anton Dumitriu

Logica polivalentă

Ediţie nouă, complet refăcută
şi adăugită de autor cu colaborarea lui
Teodor Stihi

Editura enciclopedică română
Bucureşti — 1971

Redactor: LADISLAU REDLINGER
Tehnoredactor: OLIMPIU POPA

Coli tipar: 26,5

Tiparul executat la Combinatul
Poligrafic „Casa Scînteii"
Piața Scînteii nr. 1, București
Republica Socialistă România

Prefață

În anul 1943 am publicat o lucrare purtînd același titlu ca și cea de față, Logica polivalentă. *(care era cursul nostru ținut la Universitatea din București în anul 1942 — 43). Ea s-a bucurat de o bună primire din partea specialiștilor, atît în țară cît și în străinătate. Acest lucru s-a datorat probabil și faptului că, așa cum scria acad. Gr. C. Moisil („Revista Fundațiilor", oct. 1944), „era singura lucrare de acest fel din literatura universală".*

În același an, prof. Enrico Bompiani, membru al Academiei dei Lincei, aflîndu-se în București, mi-a propus să publice Logica polivalentă *în limba italiană, sub auspiciile instituției din care face parte, dar acest proiect nu a putut fi dus la capăt din cauza evenimentelor care au urmat imediat în Italia. În 1947, planul de traducere era reluat. Traducerea era deja efectuată, dar am oprit publicarea ei din două motive: mai întîi, apăruseră între timp o serie de studii de care trebuia neapărat ținut seama în lucrare și în al doilea rînd, eu însumi îmi conturasem o perspectivă mai completă și mai comprehensivă despre logica polivalentă și despre logica matematică în general.*

Planul unei refaceri a lucrării, îmbogățirii ei cu noile rezultate obținute în acest domeniu, urmate de concluzii ma-

cuprinzătoare în perspectiva unor meditații mai îndelungate, a putut fi adus la îndeplinire abia acum.

Două idei au fost directoare în această lucrare: cartea să prezinte, pe cît se poate, întreg materialul informativ, și prin aceasta să fie în mod real un instrument de lucru; expunerea să fie orientată spre concluzia noastră generală, pe care am enunțat-o și în alte lucrări, că logica nu este o știință oarecare printre celelalte științe, ci are un caracter proeminent, caracter pe care logicienii scolastici îl subliniau prin denumirea logicii ca scientia scientiarum, ars artium, doctrina doctrinarum. *Acest rol predominant al logicii față de celelalte științe fusese acceptat și de gînditorii greci, și nu fără semnificație în fruntea operelor lui Aristotel a fost pus, de primul editor, Andronicus din Rhodos,* Organon-ul, *adică instrumentul logic.*

Poate fi extins acest instrument logic, nu în sensul unor canoane sau reguli noi față de cele clasice — această posibilitate este neîndoielnică —, ci în sensul sporirii logicității *gîndirii în comparație cu* logicitatea *ei clasică?*

Sistemele logicilor polivalente au în mod real o semnificație specifică logică sau nu?

Acestor întrebări fundamentale am căutat să le dăm un răspuns în concluziile acestei cărți.

Lucrarea a fost concepută în așa fel încît să fie accesibilă cititorilor fără a le pretinde o pregătire de specialitate. Pentru aceasta am socotit necesar să facem mai întîi o expunere introductivă, care să prezinte modul în care s-a ajuns la concepția logicii matematice, dînd și unele indicații istorice. Deoarece logicile polivalente sînt ele însele logici matematice, adică se înfățișează ca sisteme algebrice formale, am expus ideile fundamentale ale construcției acestor sisteme, păstrîndu-ne, bineînțeles, în limitele permise de profilul acestei lucrări. Am închinat apoi un capitol sistemului formal al logicii clasice, pentru a avea un termen de comparație și a se vedea astfel și modul natural al generalizării logicii clasice, generalizare pe care o reprezintă logicile polivalente.

Partea aceasta poate fi considerată deci ca o introducere în logica matematică. După aceasta, expunerea noastră s-a dezvoltat liber, urmărind, pe cît s-a putut, ordinea cronolo-

gică a apariției logicilor modale și polivalente și aplicațiile lor în diverse domenii.

În elaborarea lucrării noastre, sub forma aceasta nouă, complet refăcută și adăugită, am fost ajutat în mod substanțial, prin strîngerea materialului, procurarea bibliografiei, controlul și verificarea formulelor, de tînărul matematician Teodor Stihi de la Centrul de logică, *căruia îi aduc și pe această cale mulțumirile mele.*

De asemenea, țin să mulțumesc pentru ajutorul dat și tînărului matematician Florin Popescu din colectivul de calcul și cercetări operaționale al I.C.P.C.H.

ANTON DUMITRIU

1
Introducere. Propoziția și modalitatea ei

* 1.1. Calculul propozițional

Logica matematică s-a dezvoltat pe baza cîtorva idei care în esență sînt următoarele:

1. Logica este o știință pur formală, „formalul logic" fiind înțeles „independent de conținut"*. Putem însă gîndi ceva fără conținut, și mai ales putem raționa cu obiecte fără conținut, cu entități pur formale? Un exemplu simplu va arăta că acest lucru este posibil. Fie silogismul cunoscut: „Toți oamenii sînt muritori; Socrate e om; deci Socrate e muritor". Este evident că acest raționament se desfășoară în baza conținutului, a semnificațiilor concrete pe care le au conceptele ce intră în joc și propozițiile compuse cu ele. Dar, e ușor să ne convingem, acest silogism este numai un caz particular al următorului raționament: Toți a sînt b; c este a; deci c este b. În acest raționament a dispărut orice semnificație a literelor a, b și c, și silogismul nostru este o *formă* pur logică. Astfel de forme logice există în număr nedefinit și sarcina unei logici formale este de a le descoperi și a le pune în adevărata lor lumină.

2. Elementul primitiv al logicii noi nu e conceptul, așa cum era în logica tradițională, ci propoziția. Ideea aceasta a fost aplicată complet pentru prima dată de

*Nu este vorba aici despre categoria de conținut a gnoseologiei marxiste, ci despre „conținut" ca noțiune a logicii formale.

Whitehead şi Russell în lucrarea lor fundamentală *Principia Mathematica*. Actul prin care spiritul ia contact cu realitatea externă este o judecată, iar formularea ei este o propoziţie. Conceptul nu este decît un reziduu al unei sau al unor judecăţi, care sînt, astfel, elemente logice primitive. Din punct de vedere psihologic, această idee a fost lămurită de L. Brunschvicg în lucrarea sa *La modalité du jugement*. Există, aşadar, acte simple ale spiritului, de aprehensiune primară, care se formulează în propoziţii. De pildă: „afară plouă"; „soarele este cald" etc. Acestea vor fi numite de Russell propoziţii *atomice* sau *elementare*.

Propoziţiile se leagă între ele, formînd fraze, care sînt propoziţii mai complicate, propoziţii *moleculare*, cum sînt numite de Russell. Cum sînt alcătuite însă propoziţiile moleculare? Un examen, oricît de sumar, arată că ele sînt compuse din propoziţii atomice legate prin conjuncţii. Spre exemplu: „afară plouă şi ninge"; „dacă plouă, îmi iau umbrela" etc. Cum numărul conjuncţiilor este redus, urmează că putem stabili anumite tipuri de propoziţii moleculare după conjuncţiile care leagă propoziţiile atomice. Să notăm propoziţiile elementare cu literele p, q, r... Pentru conjuncţia „şi" să utilizăm un semn, de exemplu punctul. Atunci a spune că „afară plouă şi ninge" înseamnă a spune o propoziţie de tipul următor:

$$p \cdot q,$$

adică propoziţia p şi propoziţia q sînt adevărate amîndouă. Tot astfel, dacă pentru expresia „dacă... atunci..." utilizăm un semn, de pildă „$\supset$", propoziţia „dacă plouă, îmi iau umbrela" poate fi socotită ca un caz particular al tipului următor de propoziţie moleculară:

$$p \supset q$$

„Dacă p atunci q", unde p este o propoziţie atomică ca şi q.

În chipul acesta se pot găsi o serie de formule în care intră numai litere legate prin semne reprezentînd conjuncţii; ele vor fi forme logice pure, în care conţinutul nu apare în nici un fel.

3. Utilizarea simbolurilor va îngădui să se transforme unele formule în altele, ceea ce va fi, în definitiv, un calcul logic, asemănător calculului algebric.

În ceea ce urmează, entitățile care intră în calcule fiind propoziții, calculul va purta numele de „calcul propozițional". Preciziunea care se cîștigă prin aceasta este unul din rezultatele cele mai importante ale „logicii simbolice".

* 1.2. Valoarea propozițiilor

„Ne putem întreba multe lucruri despre o propoziție — scrie Nicod. Care este materia, forma, interesul ei, chiar frumusețea ei, dar mai înainte de toate acestea, este ea *adevărată*? Celelalte chestiuni și le pune spiritul; dar pe aceasta din urmă o pune propoziția, pentru a spune așa, de la sine"[1].

Această afirmație a logisticianului francez Nicod se referă la logica formală, la o logică în care conținutul propozițiilor este eliminat. În acest caz nu mai poate fi vorba nici de frumusețea propoziției, nici de interesul ei etc., ci doar de adevărul sau falsitatea ei. În aceasta poate consta, exclusiv, caracteristica unei propoziții formale. O propoziție oarecare „q" va fi adevărată sau falsă după cum o vom declara, (în cadrul unui sistem) și la atît se poate reduce tot ce putem spune despre ea.

Dacă o propoziție va fi declarată adevărată, vom spune că valoarea ei este adevărul; dacă va fi declarată falsă, valoarea ei va fi falsul.

Propozițiile moleculare vor exprima în raport cu adevărul sau falsul propozițiilor atomice legăturile dintre acestea.

De pildă, propoziția pe care am considerat-o mai înainte, „dacă plouă, îmi iau umbrela", înseamnă: dacă este adevărată prima propoziție, este adevărată a doua. Sau sim-

[1] **Jean Nicod,** *Les relations de valeurs et les relations de sens en logique formelle*, în „Revue de Métaphysique et de Morale", 1924, pp. 577-583.

bolic: dacă p este adevărat, atunci q este adevărat. Tot astfel, în cazul propoziției moleculare „plouă sau ninge", avem tot o propoziție ipotetică: dacă cel puțin una din propozițiile simple este adevărată, atunci întreaga propoziție este adevărată. Simbolic, „p sau q" înseamnă: dacă sau p este adevărat, sau q este adevărat, atunci „p sau q" este adevărată. Pe scurt, toate formele logice sînt ipotetice în raport cu valoarea propozițiilor. În logica formală propozițiile moleculare nu leagă decît valorile eventuale ale propozițiilor atomice, din care cauză ele apar ca forme ipotetice.

Se pune însă problema: putem noi face abstracție de sensul propozițiilor atunci cînd stabilim legături între valorile lor de adevăr? Iată o chestiune care a fost discutată în modul următor de Jean Nicod.

Cînd spun: „dacă p este adevărat atunci și q este adevărat", s-ar părea că nu pot afirma această consecvență între p și q decît dacă țin seama de conținutul acestor propoziții, „p" și „q", și stabilesc că din adevărul uneia decurge adevărul celeilalte. Totuși nu este așa. Într-adevăr, este ușor să ne convingem că există foarte multe propoziții moleculare al căror adevăr nu depinde decît de adevărul sau falsitatea propozițiilor componente. De exemplu, cînd spun propoziția „p sau q", cu alte cuvinte propoziția moleculară formată cu p și q este adevărată dacă cel puțin una din propoziții este adevărată, am determinat valoarea acestei propoziții moleculare dacă declar numai valorile propozițiilor p și q. Propoziția p poate fi adevărată sau falsă, propoziția q poate fi, la rîndul ei, adevărată sau falsă; avem, așadar, patru combinații posibile: 1. prima este adevărată și a doua adevărată; 2. prima este falsă, a doua adevărată; 3. prima este adevărată, a doua falsă; 4. prima este falsă și a doua este falsă. Deci propoziția moleculară „p sau q" este adevărată dacă cel puțin una dintre propoziții este adevărată. Cu alte cuvinte legătura dintre p și q, exprimată prin conjuncția „sau", este adevărată dacă una dintre propoziții este adevărată sau dacă amîndouă sînt adevărate.

Iată un tabel care arată această corespondență dintre valorile de adevăr ale lui „*p*" și „*q*" și valorile lui „*p* sau *q*"

p	*q*	*p* sau *q*
adevărat	adevărat	adevărat
fals	adevărat	adevărat
adevărat	fals	adevărat
fals	fals	fals

Propoziția moleculară „*p* sau *q*" a luat valoarea „fals" numai cînd amîndouă propozițiile care o compun, „*p*" și „*q*", au fost false, fiindcă acest caz e contrar definiției. Există, așadar, astfel de legături între propoziții, încît valorile de adevăr ale propozițiilor compuse obținute în acest mod sînt determinate numai de valorile propozițiilor componente. Orice ar reprezenta propoziția *p*, dacă ea este adevărată, propoziția „*p* sau *q*" este adevărată. Același lucru se poate spune și despre celelalte cazuri: orice ar reprezenta propozițiile *p*, *q*, adevărul sau falsitatea unei legături *R* dintre ele, care se poate scrie „*p R q*", depinde numai de adevărul sau falsitatea propozițiilor componente. Sensul lor nu intră în nici un fel în determinarea legăturii lor. Vom vedea că astfel de legături au fost studiate de Wittgenstein și au fost numite, după Russell, *funcții de adevăr*. Există, prin urmare, *relații de valori*, care stabilesc numai legături între valorile unor propoziții.

Nicod afirmă că există și *relații de sens*, care se stabilesc, în acest caz pe baza conținutului propozițiilor. De pildă „*p* sau *q*" este o relație de valori; dar „*p* este contradictoria lui *q*" sau „*p* este subalterna lui *q*" sînt relații de sens[2]. În relațiile de felul acestora din urmă nu ne interesează dacă propozițiile sînt sau nu adevărate, ci numai ce spun ele.

În fond, ce este efectiv deducția logică? De la adevărul sau falsitatea unor propoziții, adică de la valorile unor propoziții, conchidem valoarea de adevăr a altei propoziții. Pentru ca această trecere, de la valorile date la valoa-

[2] *Ibidem*, p. 578.

rea propoziției care rezultă să fie posibilă, trebuie să fie **dată** relația de valoare dintre propoziții.

Cum se obține aceasta? „Nu inferăm, în mod obișnuit, asupra unor propoziții fără înțeles pentru noi și ale căror relații de valoare ne-ar fi date de un geniu — scrie Nicod. Operăm cu propoziții inteligibile și trebuie să descoperim noi înșine relațiile de valoare pe baza cărora vom trece de la valorile unora dintre ele la valorile alteia"[3]. Atunci, cum pot fi obținute aceste legături? Regula este următoarea, așa cum o exprimă Nicod: „Trebuie ca o relație de sens, sesizată între propoziții, să-mi garanteze o anume relație de valoare"[4]. Cu alte cuvinte, nici o inferență nu este posibilă fără o relație de sens; numai că această inferență, pe care o îngăduie relația de sens, nu se face pe baza ei, ci pe baza relației de valoare pe care ea o legitimează. Așadar, relațiile de sens nu sînt decît mijloace de a stabili relațiile de valoare[5].

Pentru a putea infera, este de ajuns să cunoaștem numai relațiile de valoare, și cu acestea se ocupă logica simbolică. Se vede dar de ce nu este necesar să considerăm conținutul propozițiilor care ar da relațiile de sens, deoarece acestea nici nu sînt de vreun interes pentru logica simbolică și nici nu fac altceva decît explică relațiile de valoare în cazurile particulare în care ele se aplică; numai relațiile de valoare îngăduie inferența.

* 1.3. Originile calculului propozițional

Logicianul polonez Jan Łukasiewicz a arătat, cu toată evidența, legăturile istorice ale calculului propozițional cu logica Stoicilor, și în special cu logica lui Chrysippos, unul dintre cei mai mari logicieni ai antichității, pe care Łukasiewicz nu se sfiește să-l pună, ca logician, pe picior de egalitate cu Aristotel[6].

---

[3] *Ibidem.*

[4] *Ibidem*, p. 579.

[5] *Ibidem.*

[6] **Jan Łukasiewicz,** *Zur Geschichte der Aussagenlogik* („Erkenntnis" 5, pp. 111—131; 1935—1936).

Logica Stagiritului era o logică a conceptelor şi a raportului dintre ele. Stoicii ajung însă să considere propoziţia ca element fundamental al logicii plecînd de la silogismul ipotetic. În *Primele analitice*, însuşi Aristotel vorbise despre astfel de silogisme care se bazează pe o ipoteză, pe o propoziţie acceptată fără dovadă (ἐξ ὑποθέσεως), scriind: „Multe alte silogisme sînt formate plecînd de la ipoteze care trebuie studiate şi explicate clar"[7]. El nu a făcut însă studiul lor, deşi din cauza propoziţiei de mai sus, pe care am citat-o, unii istorici au susţinut că ar fi scris, totuşi, o lucrare despre silogismul ipotetic, dar care s-ar fi pierdut.

Discipolii lui Aristotel, Theophrast şi Eudem, au cercetat mai de aproape silogismul ipotetic.

Important este faptul că pentru Theophrast şi Eudem nu interesează ipoteza arbitrară care serveşte de premisă silogismului ipotetic, ci *legătura* termenilor, pe baza căreia unul antrenează pe celălalt. Theophrast împarte silogismele ipotetice în două grupe.

Prima grupă cuprinde silogismele care arată condiţiile prin care ceva este sau nu este şi se compun din propoziţii pur ipotetice.

Notînd propoziţiile cu *A*, *B*, *C*, el distinge trei feluri, corespunzătoare celor trei figuri ale silogismului categoric.

Dacă *A* este, *B* este	Dacă *A* este, *B* este
Dacă *B* este, *C* este	Dacă *A* nu este, *C* este
Dacă *A* este, *C* este	Dacă *B* este, *C* nu este
Dacă *C* nu este, *A* nu este	Dacă *C* este, *B* nu este

Dacă *A* este, *B* este
Dacă *C* este, *B* nu este
Dacă *A* este, *C* nu este
Dacă *C* este, *A* nu este

[7] *Analytica priora*, I. 29. De altfel se găsesc şi alte „legi" logice asupra propoziţiilor ipotetice în *Organon*. De exemplu, în *Analytica priora* (II, 2, 53b): „Din premise adevărate nu se poate scoate o concluzie falsă, dar din premise false se poate scoate o concluzie adevărată". Ceea ce logicienii scolastici vor spune: *Ex veris igitur non potest falsum concludi, ex falsis verum potest*. Astfel de reguli se mai găsesc în *Analytica priora* (II, 2, 54b) etc.

Interesante sînt silogismele din a doua grupă, care arată existența sau neexistența unui lucru, așa-numitele *modus ponens* și *modus tollens*, de care logica actuală se va folosi într-o largă măsură pentru inferențe.

Modus ponens	*Modus tollens*
Dacă *A* este, *B* este	Dacă *A* este, *B* este
Dar *A* este	Dar *B* nu este
Deci *B* este	Deci *A* nu este[8]

Se vede că în aceste silogisme ceea ce interesează nu mai este conținutul propozițiilor, ci modul în care se articulează valorile lor.

Stoicii au reluat silogismul ipotetic și, după cum ne spune Alexandru din Aphrodisia[9], nu au recunoscut ca valabile decît formele ipotetice ale silogismelor, cele categorice fiind, pentru ei, juste în ceea ce privește materia lor, dar neregulate din punctul de vedere formal.

Pentru Chrysippos raționamentul (λόγος) se compune din: o ipoteză, o propoziție adițională și din consecință. De exemplu: „dacă este ziuă este lumină; însă este ziuă; deci este lumină."

El admite cinci forme perfecte de silogism, și anume acelea de mai sus, studiate de Theophrast, silogisme ipotetice toate, și la care trebuie să se reducă celelalte.

După cum se vede, Stoicii pleacă de la propoziții ca elemente primitive și, utilizînd raționamentul ipotetic, leagă numai valorile lor (adevărate și false). Cu aceasta ei sînt primii care au construit — evident într-un mod primitiv — o logică formală. Astfel, Łukasiewicz are dreptate să numească pe Chrysippos „primul scolastic", deși nu se pot desconsidera, în istoria logicii formale, numele lui Theophrast și Eudem, cum am căutat să arătăm.

Din cauza utilizării propozițiilor ca elemente indivizibile, Stoicii au fost împinși să caute a enumera toate

[8] Vezi **C. Prantl**, *Geschichte der Logik im Abendlande*, vol. I, p. 385 (Leipzig, 1885).

[9] Comentariul la care ne referim, al lui **Alexandru din Aphrodisia**, poartă numele *In Aristotelis Analyticorum priorum librum I Commentarium*.

felurile de propoziţii posibile, după veşmîntul lor formal, nu după conţinut. Interesantă este despărţirea în judecăţi simple (ἁπλᾶ) şi non-simple (οὐκ ἁπλᾶ). O judecată (ἀξίωμα) simplă este aceea care se compune din cuvinte, dar nu din alte propoziţii; este propoziţia atomică a lui Russell. Judecata non-simplă se compune din judecăţi simple: este propoziţia moleculară a lui Russell.

Mai mult, Stoicii au despărţit judecăţile non-simple după natura conjuncţiilor care leagă judecăţile simple, adică exact aşa cum au procedat Russell şi Whitehead în *Principia Mathematica*: conjuncţiei „dacă" (εἰ) îi corespunde judecata ipotetică (τὸ συνημμένον) „dacă este ziuă, este lumină"; conjuncţiei „deoarece" (ἐπειδή) îi corespunde judecata adjunctă (πάρα συνημμένον) „deoarece este ziuă, este lumină". Lui „şi" (καὶ) îi corespunde judecata copulativă (συμπεπλεγμένον) „este ziuă şi este lumină". Pentru conjuncţia „sau" (ἤ) avem judecata disjunctivă (διεζευγμένον) „sau este ziuă, sau este noapte". Mai departe, judecata cauzală (αἰτιῶδες) se exprimă prin conjuncţia „fiindcă" (διότι): „fiindcă e ziuă, e lumină" etc.

În total, Stoicii admiteau cinci tipuri de raţionament[10]. Ei obişnuiau să înlocuiască cu numere termenii raţionamentului[11] şi aşa au ajuns să formuleze aceste cinci forme în modul următor:

I. Dacă primul este, atunci al doilea este
Dar primul este
Deci al doilea este

II. Dacă primul este, atunci al doilea este
Dar al doilea nu este
Deci primul nu este

[10] **Diogene Laerţiu,** *Viaţa şi doctrinele filozofilor iluştri* (VII, 79), ne spune că Chrysippos a socotit că există cinci tipuri de raţionament, număr confirmat şi de Sextus Empiricus în *Schiţe Pyrrhoniene* (II, 57), care adaugă că aceste cinci tipuri de raţionament ipotetic ar fi fost fundamentale pentru logica stoică, „la care par a raporta pe toate celelalte".

[11] **Appuleu,** *De Dogmate Platonis* (cartea a III-a).

III. Primul nu este în acelaşi timp cu al doilea
Primul însă este
Deci al doilea nu este

IV. Sau primul este, sau al doilea
Primul însă este
Deci al doilea nu este

V. Sau primul este, sau al doilea
Însă al doilea nu este
Deci primul este

Cu aceste cinci tipuri simple de argumente se pot forma o mulţime de argumente non-simple, care pot fi reduse toate la acestea, după cum ni s-a transmis că ar fi făcut Chrysippos.

Nu vom insista mai mult asupra acestei chestiuni istorice; vom spune numai că în evul mediu, atît de neglijat în ceea ce priveşte imensa lui producţie de logică, teoria propoziţiilor ipotetice era perfect cunoscută. Posedăm nenumărate tratate despre această teorie, căreia i se spunea teoria „consecinţelor" — *consequentiae* —, tratate care au fost aduse la lumină abia în timpul nostru, de către istoricii logicii matematice.

Într-adevăr, s-a dovedit că partea numită de logica matematică „calculul propoziţional" era bine cunoscută de către logicienii scolastici şi o mulţime de teoreme ale acestui calcul figurau în tratatele lor[12].

* 1.4. Modalitatea propoziţiilor

Judecăţile — şi, prin urmare, propoziţiile prin care ele se exprimă — se împart în mai multe categorii, pe care logica clasică le studiase în amănunt.

[12] Pentru istoria şi originile calculului propoziţional în evul mediu vedeţi lucrarea noastră *Istoria logicii* (cap. XXII), Editura didactică şi pedagogică, 1969.

După *calitate*, avem propoziții afirmative și propoziții negative. După *cantitate*, unele propoziții sînt universale, altele particulare. Kant mai introdusese distincția între propozițiile analitice și cele sintetice, dar această distincție nu poate interesa logica formală, deoarece ea privește modul în care se formează cunoștințele. Cea mai importantă împărțire a propozițiilor este însă aceea făcută după *modalitatea* lor și de care logica polivalentă se va servi esențial, cum vom vedea.

Teoria modalității este formulată în manualul clasic al lui Petrus Hispanus *Summulae Logicales*. Există patru moduri ale propozițiilor: 1 — posibil; 2 — contingent; 3 — imposibil; 4 — necesar. Modul unei propoziții este format dintr-una din expresiile „este posibil", „este contingent", „este imposibil", „este necesar"; cealaltă parte, care este propoziția propriu-zisă, este numită *dictum*. De exemplu, în propoziția modală, „este posibil ca Pămîntul să fie rotund", modul este „este posibil", iar *dictum*-ul este „ca Pămîntul să fie rotund". În afară de aceasta, se poate ca o propoziție modală să fie afirmativă sau negativă. Toate combinațiile acestea au fost rezumate în patru cuvinte latinești, pe care scolasticii le redau astfel:

Purpurea, *Amabimus*, *Iliace*, *Edentuli*.

Fiecare cuvînt are patru silabe, corespunzînd celor patru moduri, în ordinea enumerată mai sus. De pildă, silabele inițiale ale acestor cuvinte artificiale, anume *Pur*, *A*, *I* și *E*, se referă la modul „posibil". Cum însă am văzut că o propoziție modală se compune din două părți (modul și *dictum*), se poate nega sau afirma numai una sau amîndouă dintre aceste părți. Vocalele cuvintelor noastre indică tocmai ce trebuie afirmat și ce trebuie negat, conform următorului vers mnemotehnic:

E dictum negat, *Ique modum*, *nihil A*, *sed U totum*

Să presupunem că luăm propoziția „Pămîntul e rotund" și vrem să o punem, în toate chipurile, la modul posibil, care are silabele *Pur*, *I*, *A* și *E*. Vom avea patru cazuri și vocalele vor arăta, după vers, ce se neagă și ce se afirmă. *U* din *Pur* arată că și modul și *dictum* sînt negative *(sed U totum)*: *I* spune că se neagă modul *(Ique modum)*; *A*

indică că amîndouă propoziţiile sînt afirmative *(nihil A)*; în sfîrşit, *E* spune că se neagă *dictum*-ul *(E dictum negat)*. Aşadar:

1. Nu este posibil ca Pămîntul să nu fie rotund.
2. Nu este posibil ca Pămîntul să fie rotund.
3. Este posibil ca Pămîntul să fie rotund.
4. Este posibil ca Pămîntul să nu fie rotund.

Iată toate formele pe care le poate îmbrăca o propoziţie posibilă.

Procedînd la fel cu „contingent", luînd adică silaba a doua din fiecare cuvînt, căpătăm propoziţiile modale respective etc.

Este de remarcat că „posibilul" şi „contingentul" nu sînt deosebite din punct de vedere formal; de aceea şi în cuvintele de mai sus ele sînt reprezentate de aceleaşi vocale în fiecare cuvînt. De exemplu, în *Purpurea*, avem silaba *Pur* cu *u* pentru posibil şi tot *pur* cu *u* pentru contingent.

Aristotel considera numai trei modalităţi ale propoziţiilor — realitate, posibilitate şi necesitate —, triadă la care s-a oprit şi Kant. Într-adevăr, imposibilitatea nu este un mod distinct, ci este negaţia modului posibil. Astfel, diviziunea judecăţilor, după Kant, în ceea ce priveşte modalitatea lor, în *asertorice*, *apodictice* şi *problematice*, nu este altceva decît împărţirea lui Aristotel: „Orice judecată se referă la ceea ce este real, necesar sau posibil"[13].

Aristotel nu s-a ocupat, cum am văzut, în *Organon*, de silogismele ipotetice, în schimb el a făcut o analiză amănunţită a silogismelor „modale", cum vor fi numite de scolastici. Dacă orice propoziţie afirmă sau o realitate, sau o necesitate, sau o posibilitate, urmează că vom avea diverse silogisme după cum luăm premise necesare, posibile, asertorice, sau una din premise necesară, alta posibilă etc.

Studiul acestor silogisme este destul de vast în *Organon* şi se întinde în cincisprezece capitole[14].

---

[13] *Analytica priora*, 1, 2.

[14] *Analytica priora*, I, 8–22.

* 1.5. Semnificaţia modalităţii

Este evident că „posibil", „necesar" şi „real" nu sînt noţiuni atît de simple şi că jocul silogistic sau, în general, deductiv, care va face uz de ele, va avea să suporte consecinţele înţelesului ce li se acordă.

Pentru Aristotel, real, posibil şi necesar erau moduri ale Fiinţei însăşi; ele aveau un caracter obiectiv, iar ştiinţa avea de scop să determine raporturile inteligibile din natură, care unesc posibilul, realul şi necesarul. Această idee era în acord cu întreaga logică a Stagiritului, deoarece în logica lui legile gîndirii exprimau legile existenţei; semnificaţia acestor idei era dată de teoria ontologică a cauzei formale, a puterii şi a actului. Posibilul nu înseamnă tot ce poate exista, ci ceea ce se opune necesarului, ceea ce poate să existe sau să nu existe: „Contrariul tuturor lucrurilor care sînt numite posibile este posibil"[15]. Posibilitatea aristotelică nu era, în felul acesta, o determinare ultimă şi originară a Fiinţei, cum va fi considerată astăzi de Heidegger, deoarece ea cuprindea şi posibilitatea ne-Fiinţei.

De asemenea, este interesant de notat că există diverse înţelesuri ale aceleiaşi modalităţi. Spre exemplu, Aristotel a deosebit trei sensuri fundamentale pentru necesitate: 1. indispensabilul — necesitatea scop; 2. obligativul — forţa care sileşte; 3. necesitatea simplă — care nu are nici o legătură cu forţa sau scopul.

Nu este locul să intrăm aici în discuţia acestor idei; am voit numai să sugerăm că există foarte multe sensuri ale modalităţilor şi că orice logică care le va utiliza va avea să suporte ipoteca punctului de vedere ales.

Problema care se pune este aceasta: există, din punct de vedere formal, un criteriu sigur după care pot fi delimitate, în mod strict, diversele speţe modale? O astfel de problemă şi-a pus L. Brunschvicg[16] şi răspunsul lui a fost negativ.

---

[15] *Metafizica*, VIII, 9.

[16] **L. Brunschvicg,** *La modalité du Jugement*, p. 29 (Ed. Alcan).

„Modalitatea — scrie Brunschvicg — nu aparține judecății, considerată în expresia ei spontană; ea se datorește reflexiei critice, unui fel de judecată asupra judecății".

Cu alte cuvinte, nu există criterii intrinsece ale modalităților. O judecată este necesară dacă afirmația contrară nu poate fi concepută. Însă, cum observă Brunschvicg, criteriul acesta nu este de loc decisiv. Tot astfel, posibilul nu este decît realul insuficient determinat. Cum se vede, modalitatea unei judecăți este în strînsă legătură cu realul, cu posibilitățile care reprezintă adevărul. De aceea el are să conchidă: „Problema logică a modalității implică problema metafizică a adevărului"[17].

Problema modalității propozițiilor este, prin urmare, extrem de delicată și nu putem afirma, pentru un mod anume, o definiție categorică. Trebuie reținută însă și observația lui Brunschvicg că modalitatea este un fel de judecată asupra judecății, lucru pe care Goblot îl exprimă și mai clar: „Nu există modalitatea judecății, există numai judecăți de modalitate"[18].

Această idee, după cunoștința noastră, a fost exprimată, pentru prima dată, de logicianul german Christoph Sigwart. „Dacă orice judecată este afirmația sau negația unei întrebări — scrie Sigwart —, atunci propoziția care nu afirmă și nici nu neagă nu poate fi o judecată"[19]. Așadar, propoziția problematică „*A* este poate *B*" nu reprezintă decît îndoiala gîndirii noastre, incertitudinea subiectivă a noastră, dar nimic obiectiv cu privire la „*A* este *B*". „Teoria că așa-numitele judecăți problematice ar fi o specie de judecăți trebuie respinsă dacă admitem că în conceptul de judecată există afirmația adevărului unei propoziții și dacă o judecată trebuie să fie sau adevărată, sau falsă"[20].

Ce semnificație au atunci noțiunile de posibil și necesar? Posibilitatea, crede Sigwart — și această concepție este legată de aceea a lui Aristotel sau a unor gînditori

[17] *Ibidem*, p. 37.

[18] **E. Goblot**, *Traité de logique*, p. 164 (Ed. A. Colin), Paris, 1937).

[19] **Ch. Sigwart**, *Logik*, 1 Band, p. 243 (Tübingen, ed. IV, 1911).

[20] *Ibidem*, pp. 244—245.

contemporani, cum este Heidegger —, are un caracter obiectiv numai atunci cînd se referă la cursul în timp al evenimentelor și nu poate apărea decît în raport cu noțiunea de necesitate. Judecata „este posibil ca *A* să fie *B*" este contradictorie cu judecata „este necesar ca *A* să nu fie *B*"; tot astfel judecata „este posibil ca *A* să nu fie *B*" este contradictorie cu judecata „este necesar ca *A* să fie *B*"[21].

Nu se poate spune dar — și această concluzie ar putea fi documentată larg — că există un criteriu precis pentru definiția modalităților; dimpotrivă, problema rămîne deschisă și accepțiile date noțiunilor de posibil și necesar depind de modul în care diferitele sisteme filozofice definesc categoriile.

Observație. Extensiunea noțiunii de modalitate și clasificarea ei.

Noțiunea de modalitate a căpătat la unii logicieni, ca de exemplu Petrus Hispanus, o extensiune mult mai largă decît cea obișnuită. Vom urmări în această privință pe G. H. von Wright[22]. Von Wright numește logică modală logica conceptelor modale, pe care le distinge de conceptele sau categoriile de adevăr *(truth-concepts* sau *truth-categories)*: adevărul, falsul și cele ce țin de acestea.

Categoriile modale, înțelese de el într-un sens mai larg decît cel obișnuit, sînt împărțite în patru feluri de „moduri" *(modi)*, și anume:

Modurile aletice sau de adevăr sînt cele cu care s-a ocupat logica modală tradițională și care pot să se refere fie la adevărul unei propoziții (care poate fi: necesar, posibil sau contingent), fie la prezența sau absența unei proprietăți la un obiect (și care poate fi, la rîndul ei, necesară, posibilă sau contingentă).

Modurile epistemice sau de cunoaștere, tratate, ce-i drept, dar nu sistematic de către logicieni, sînt: verificat (cunoscut a fi adevărat), falsificat (*falsified* — cunoscut a fi fals) și nedecis (nici cunoscut a fi adevărat, nici cunos-

---

[21] *Ibidem*, p. 276.

[22] **C. H. von Wright**, *An Essay in Modal Logic*, Amsterdam, 1951, pp. 1—2.

cut a fi fals). Acestea, de asemenea, se pot referi la adevărul unei propoziții sau la prezența, respectiv absența unei proprietăți la un obiect.

Modurile deontice sau de obligație, dintre care cele mai importante sînt: obligatoriu („trebuie să"), permis („se poate") și interzis („nu trebuie")[23].

Modurile existențiale sau de existență, cărora von Wright le acordă statutul de modalități în virtutea asemănărilor de tratament dintre logica modală și teoria cuantificării[24], sînt: universal, existent și vid.

Similaritățile esențiale dintre modurile aparținînd respectiv celor patru categorii pot fi puse în evidență, cu ajutorul unui tabel, astfel:

aletic	epistemic	deontic	existențial
necesar	verificat	obligatoriu	universal
posibil		permis	existent
contingent	nedecis	indiferent	
imposibil	falsificat	interzis	vid

Lista modurilor enumerate este, evident, necompletă.

* 1.6. Ce este logica polivalentă?

Valorile de adevăr ale unei propoziții în logica clasică sînt două: adevărul și falsul. Ele rezultă din principiul terțiului exclus: orice propoziție este sau adevărată, sau

[23] Noi precizăm aici că teoria modurilor deontice, cum este numită de von Wright, era bine cunoscută logicienilor scolastici sub numele de „Teoria obligațiilor" — *De obligationibus*, asupra căreia au scris nenumărate și amănunțite *Tractatus* (vedeți **A. Dumitriu**, *Istoria logicii*, 23.4.1.).

[24] Teoria cuantificării este o ramură a logicii formale care se ocupă cu analiza modului în care este atribuit într-o propoziție, sub aspectul cantității, predicatul subiectului. De pildă cînd spun „oamenii sînt muritori", predicatul „muritor" poate fi atribuit *unor* oameni sau *tuturor*. Pentru lămurirea acestui subiect a se vedea *3.9 din lucrare.

falsă, *tertium non datur*. Logica tradiţională, utilizînd în deducţie numai cele două valori, era o logică *bivalentă*.

S-a ivit însă cazul, în matematică sau în alte domenii, cînd unele propoziţii nu puteau fi declarate nici false şi nici adevărate, fie din cauză că nu era posibil să se găsească o demonstraţie care să dovedească adevărul sau falsitatea unei astfel de propoziţii, fie din pricină că, dacă admitem una sau alta dintre aceste valori, se ajunge la contradicţii. O propoziţie de felul întîi este teorema lui Fermat, de pildă.

Există sau nu există patru numere întregi, x, y, z şi n, unde $n>2$, aşa fel ca între ele să aibă loc relaţia:

$$x^n + y^n = z^n$$

Propoziţia aceasta nu a putut fi dovedită pînă astăzi, cu toate încercările făcute, nici adevărată şi nici falsă; ea scapă principiului terţiului exclus.

Există, de asemenea, paradoxe, cum sînt acelea formate cu „impredicabil" sau acelea din „teoria mulţimilor", unde o propoziţie, fie că este declarată adevărată, fie că este declarată falsă, conduce la contradicţii, la negaţiile propriilor noastre ipoteze.

În condiţiile acestea, logicienii actuali s-au văzut siliţi să introducă şi alte valori pentru propoziţii decît diada adevăr-fals. Există valori ale unei propoziţii care nu sînt nici adevărul şi nici falsul. În special s-a luat ca valori pentru propoziţii modalitatea lor, adică „posibilul", „necesarul", „imposibilul", după cum vom vedea în ceea ce urmează. O logică care utilizează mai mult de două valori va fi o logică *polivalentă*; dacă utilizează trei valori distincte, va fi o logică *trivalentă*; dacă admite patru valori deosebite, va fi o logică *tetravalentă* etc. S-a imaginat şi o logică cu o infinitate de valori, despre care vom vorbi la locul cuvenit. Ar fi fost dar mai exact să vorbim nu despre „logica polivalentă", ci despre „logicile polivalente".

Vom remarca faptul că aceste logici, admiţînd că există şi alte valori în afară de adevăr şi fals, duc la consecinţa că în anume cazuri principiul terţiului exclus nu se mai aplică. Într-adevăr, o propoziţie nu mai este sau adevărată

sau falsă, ci are sau valoarea adevărat, sau fals, sau a treia valoare logică aleasă (în cazul unei logici trivalente).

Aristotel admisese — se pare — că într-un anume caz principiul terţiului exclus nu funcţionează: anume cînd era vorba despre viitorul contingent, în care o afirmaţie poate fi numai posibilă, dar nu necesară. Nu Aristotel s-ar opune dar logicii polivalente; în antichitate, Stoicii au fost aceia care au susţinut — din motive pe care le vom vedea — valabilitatea universală a principiului terţiului exclus.

În particular, Chrysippos a fost susţinătorul înverşunat al acestui principiu, pe care logicile polivalente îl consideră cu o aplicaţie limitată, din care cauză logicianul polonez Jan Łukasiewicz a denumit logicile care fac uz de mai multe valori şi logici *ne-chrysippiene*.

Singura observaţie pe care o vom face aici este că modalităţile, nefiind perfect definite, logicile care le consideră ca valori deosebite de valoarea diadică adevăr-fals vor avea să suporte ipoteca acestei nedeterminări, cum va reieşi din analiza pe care o întreprindem în această lucrare.

* 1.7. Logici modale şi polivalente

În expunerea care urmează vom prezenta o serie de sisteme logice dintre care unele s-au numit modale, iar altele polivalente.

Această distincţie, făcută în literatura de specialitate, ţine seamă de faptul că în primele se consideră în mod explicit modalităţile unei propoziţii (posibilitatea, necesitatea etc.) şi legăturile dintre ele, pe cînd în celelalte se pleacă de la supoziţia că o propoziţie poate avea mai mult decît două valori de adevăr (adevărul şi falsul), dezvoltîndu-se astfel o logică în care studiul modalităţilor nu este de la început explicitat. Asemenea distincţii sînt greu de sesizat în lipsa aparatului formal pe care se bazează. De aceea vom mai reveni asupra lor în finalul acestei lucrări, cînd cititorul va avea la îndemînă acest aparat. Ţinem doar să menţionăm că problemele legate de această deosebire sînt încă controversate.

2
Sisteme formale

* 2.1. Metoda axiomatică

Apariţia unor dificultăţi destul de mari, mai întîi în domeniul matematicilor pure şi apoi în fizica matematică şi cea experimentală, a determinat pe oamenii de ştiinţă să scruteze mai de aproape structura ştiinţelor teoretice, pentru a avea o schemă conceptuală clară a oricărei ştiinţe deductive. În modul acesta s-au separat cu precizie părţile admise fără definiţie sau fără demonstraţie de acelea care rezultă prin definiţie sau deducţie şi s-au enumerat şi enunţat în mod precis regulile care permit aceste derivări. Este vorba de o adevărată anatomie a teoriilor deductive, care explicitează fiecare parte constituentă, arătîndu-i rolul şi justificînd rezultatele care se deduc în interiorul lor.

Motivele care au determinat această analiză riguroasă a constituţiei oricărei ştiinţe teoretice sînt multiple.

Mai întîi apariţia geometriilor neeuclidiene a pus în discuţie noţiunea de axiomă.

O serie de geometri au căutat să găsească o demonstraţie pentru postulatul lui Euclid. Acest lucru s-a dovedit imposibil, pînă cînd, în acelaşi timp, doi geometri au avut ideea să renunţe la el socotind că-l pot înlocui cu un postulat contradictoriu cu acesta.

Acest lucru a fost efectiv realizat pentru prima dată, în același timp și independent unul de celălalt, de Lobacevski și Bolyai, și astfel s-au născut geometriile neeuclidiene. Avem astfel:

1. Geometria euclidiană, cu postulatul lui Euclid valabil (care poate fi enunțat și sub forma: printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă și numai una).

2. Geometriile neeuclidiene de tipul Lobacevski-Bolyai, cu postulatul lui Euclid nevalabil (printr-un punct exterior unei drepte se duc două paralele la acea dreaptă).

3. Geometriile de tipul Riemann, cu postulatul lui Euclid nevalabil (printr-un punct exterior unei drepte nu se poate duce nici o paralelă).

Geometria lui Euclid își găsește realizarea pe un plan; Beltrami a arătat (1868) că geometria lui Lobacevski-Bolyai poate fi realizată pe o porțiune de pseudosferă, care este o suprafață reală de rotație, născută prin rotirea unei curbe numită tractrice; geometria lui Riemann (fără paralele) își găsește realizarea pe o sferă reală.

Cu alte cuvinte, geometriile neeuclidiene și-au găsit un model, ele sînt perfect non-contradictorii și arată că axioma lui Euclid fusese acceptată ca atare, prin evidența ei, fără un suport care să-i îndreptățească alegerea ca axiomă.

Nu vom cita mai departe decît un singur exemplu din fizică. La sfîrșitul secolului trecut și începutul secolului nostru, o problemă preocupa pe fizicieni și astronomi: determinarea vitezei absolute a Pămîntului (față de eter). S-au imaginat aparate din ce în ce mai precise și mai fine pentru a face măsurătoarea acestei viteze, dar rezultatul era absurd; totul se petrecea ca și cînd viteza Pămîntului era nulă, adică Pămîntul era nemișcat. Cum acest rezultat era inadmisibil, s-a imaginat, pentru a găsi o explicație acestui fapt, că însuși brațul aparatului cu care se făcea experiența s-a scurtat prin mișcarea Pămîntului și de aceea rezultatul apare paradoxal.

Acest rezultat a fost extins de Einstein, care acceptă ca postulat că lungimea unui corp se contractă în raport cu viteza de care este animat. El nu poate fi stabilit prin observații făcute dinăuntrul sistemului, așa cum se admite explicit.

Această ipoteză a condus la teoria relativității, teorie grație căreia s-au putut prevedea unele fenomene fizice și astronomice, căpătînd astfel o serie de confirmări experimentale strălucite.

Aceste întîmplări din lumea științifică, precum și multe altele, au făcut ca oamenii de știință să-și schimbe complet concepția despre axiomă. Pentru Aristotel, și pînă la sfîrșitul secolului trecut, o axiomă era un adevăr evident. Pentru știința actuală o axiomă este ceea ce permite să organizăm o teorie în mod coerent. Nu se pune chestiunea adevărului sau falsității ei și mai ales ea nu are nimic de-a face cu „evidența".

Iată, în sensul acesta, ce scrie Alfred Tarski: „În general nu considerații de ordin teoretic fundamental decid cum să alegem un sistem determinat de termeni primitivi și de axiome printre toate sistemele echivalente; motivele sînt mai curînd de ordin practic, didactic și chiar estetic"[1].

Acest mod de a privi axioma a fost acceptat de oamenii de știință contemporani și iată ce scrie însuși Albert Einstein în această privință: „Această concepție modernă despre axiomă purifică matematica de obscuritățile misterioase care altădată voalau fundamentele matematicilor.

Acest mod de a prezenta lucrurile face, de asemenea, evident faptul că matematicile nu pot afirma nimic, nici cu privire la reprezentările noastre intuitive, nici cu privire la realitățile materiale"[2].

Odată ce intuiția și evidența sînt eliminate din construcția unei științe deductive, urmează că ideile primitive și axiomele nu au o bază în adîncimea realității, nu sînt legate de realitate, nu realitatea le poate da un suport; dar între ele, ele trebuie să aibă o legătură, pentru a fi compatibile și a nu conduce la rezultate contradictorii (deficiențele acestei concepții vor fi examinate în capitolul 10 al acestei lucrări).

În rezumat, studiul structurii unei științe deductive — o adevărată anatomie a ei — constă din: despărțirea elemen-

---

[1] **A. Tarski,** *Sur la méthode déductive* („Travaux du Congrès Descartes", Paris, Hermann, 1937, vol. VI, p. 100).

[2] **A. Einstein,** *Geometrie und Erfahrung*, Berlin, 1920, p. 10.

telor primitive, concepte și propoziții, de elementele derivate; enunțarea precisă a regulilor de compoziție a acestor elemente primitive; enumerarea regulilor de derivare a elementelor deductibile din elemente primitive. Această metodă de analiză a teoriilor matematice și matematizate se numește *axiomatică* și a devenit indispensabilă oricărei cercetări teoretice.

În acest sens, David Hilbert, care a dezvoltat metoda axiomatică pînă la ultimele ei consecințe, scrie: „Tot ceea ce poate constitui în genere obiect al gîndirii științifice revine, de îndată ce se află în pragul constituirii teoriei, metodei axiomatice și prin aceasta revine mijlocit matematicii. Înaintînd spre straturi tot mai adînci de axiome, se obține totodată și o înțelegere din ce în ce mai adîncă a esenței gîndirii științifice și devenim conștienți în tot mai mare măsură de unitatea cunoașterii noastre. Sub auspiciile metodei axiomatice, matematica pare a fi chemată să dețină un rol conducător în cadrul științelor în genere"[3].

În modul acesta, deoarece logica trebuie să devină o știință matematică, urmează să fie construită axiomatic, ca oricare altă știință deductivă, și acest lucru impune două condiții:

1) eliminarea intuiției din întreaga știință matematică a logicii;

2) alegerea noțiunilor primitive și a axiomelor fără un suport exterior lor, ci, așa cum spune Tarski, pentru motive de ordin metodologic, practic sau chiar didactic.

* 2.2. Formalizarea teoriilor deductive

Ideea de „formalizare" a teoriilor matematice este o consecință imediată a noii concepții despre axiomă și în general despre structura axiomatică a unei teorii.

---

[3] **David Hilbert,** *Axiomatisches Denken* (în „Mathematische Annalen", Bd. 78, 1918, pp. 405—418).

Odată ce ideile primitive şi propoziţiile primitive nu sînt admise pentru evidenţa lor şi nu au de-a face nimic cu realitatea şi conţinutul pe care ea îl poate da acestor idei şi propoziţii, urmează că ele nu au nici o semnificaţie în ele însele, devin simple simboluri vide de orice conţinut.

Ideea aceasta apare încă înainte de construirea geometriilor neeuclidiene, şi anume în secolul al XVIII-lea, la un matematician şi logician german, J.H. Lambert. Cercetînd teoria paralelelor, el îşi dă seama că „fundamentarea geometriei trebuie să facă abstracţie de reprezentarea lucrului" şi că „demonstraţiile trebuie expuse pur simbolic"[4].

Dar cel care a pus în lumină aspectul necesar pur formal (consecinţă a concepţiei moderne despre axiomă) a fost Moritz Pasch. El desparte cu toată rigurozitatea conceptele matematice în două categorii: nedefinite şi definite. Propoziţiile sînt despărţite de el, de asemenea, în două categorii: propoziţii principale şi propoziţii demonstrate. Ideea lui Pasch este următoarea: matematica pune în evidenţă relaţii între conceptele matematice, care trebuie să corespundă faptelor din experienţă, dar în marea lor majoritate nu sînt împrumutate din experienţă, ci „demonstrate". „De fapt, scrie el, dacă geometria vrea să fie cu adevărat deductivă, trebuie ca procesul deducţiei să fie tot timpul independent de *sensul* conceptelor geometrice, aşa cum trebuie să fie independent de figuri; se pot lua în considerare numai *relaţiile* dintre conceptele geometrice incluse în propoziţiile, respectiv în definiţiile folosite. În cadrul deducţiei este desigur permis şi util — *dar în nici un caz necesar* — să ne gîndim la semnificaţia conceptelor geometrice care apar; în cazul că acest lucru devine necesar înseamnă tocmai că deducţia avea lacune, că propoziţiile premergătoare sînt insuficiente ca mijloace de demonstraţie".[5]

---

[4] **J. H. Lambert,** *Theorie der Parallellinien* (în „*Magasin für reine und angewandte Mathematik*", 1786).

[5] **Moritz Pasch,** *Vorlesungen über die moderne Geometrie*, Leipzig, 1882.

Această idee este dusă la punctul ei culminant de Hilbert. Întreg sistemul logico-matematic constă, după el, dintr-un eșafodaj de simboluri, din care el elimină în mod explicit și total orice conținut. La începutul acestor cercetări (în logică), Bertrand Russell tot mai păstra o legătură între simbolul formal și procesul natural al gîndirii. Iată ce scria el: „Adoptarea regulilor simbolismului în procesul deductiv ajută intuiția în regiuni prea abstracte pentru ca imaginația să poată prezenta minții în mod prompt adevărata relație dintre ideile întrebuințate (...). Și astfel mintea este condusă să construiască șiruri de raționamente în regiuni în care imaginația ar fi cu totul incapabilă să se susțină singură fără ajutor simbolic"[6].

Acest lucru este incontestabil. Serii de concepte, serii de judecăți și chiar de raționamente pot fi acoperite de o notație simbolică bine aleasă, care concentrează și declanșează toate aceste serii de concepte, judecăți sau operații deductive, devenite familiare, de îndată ce simbolul apare undeva în cadrul procesului deductiv. Folosul simbolismului este indiscutabil. Cu ajutorul unui simplu simbol se pot concentra și efectua operații complexe mintale, care, fiind bine cunoscute, nu mai au nevoie să fie detaliate, ci numai simbolizate, astfel că rezultatul apare automat.

Matematica face uz de asemenea notații simbolice, care acoperă largi procese mintale, în mod frecvent. Familiarizarea cu acest procedeu simbolic a dus la identificarea procesului simbolic cu procesul mintal respectiv, de unde o credință aproape mistică în puterea semnului. S-a făcut astfel o identificare între simbol și ceea ce este simbolizat, socotind că simbolismul însuși are o virtute creatoare intrinsecă.

Pentru Hilbert, esența matematicii — și prin aceasta, a oricărei teorii de tip matematic — este acest joc de semne făcut după reguli precise. Simbolul nu este pentru el un auxiliar al memoriei, ci definește un fel de spațiu abstract cu atîtea dimensiuni cîte grade de libertate sînt

---

[6] **B. Russell** și **A. N. Whitehead**, *Principia Mathematica*, vol. I, Cambridge, 1910, p. 2.

în operaţia concretă şi imprevizibilă a combinaţiei[7]. Semnul, spune Hilbert, posedă în esenţa lui o regulă intelectuală care garantează contra erorii, este condiţia creaţiei prin mobilitatea lui în sensibil. Lui, scrie el, nu aplicaţiei *(Abbildung)* lui Dedekind, îi datorează matematica întreaga ei origine şi dezvoltare: „*Am Anfang so heisst es hier, ist das Zeichen*" („La început, aşa se spune aici, este semnul")[8].

După concepţia modernă a ştiinţei, acceptată astăzi de logicienii matematicieni, logica trebuie, pentru a deveni o ştiinţă matematică pură, să fie construită în condiţiile următoare: 1) să se axiomatizeze; 2) să se formalizeze.

Această concepţie se reduce la construirea logicii ca un sistem formal, şi de aceea vom vorbi mai întîi de sisteme formale[9].

* 2.3. Structura axiomatică a unei ştiinţe

Din cele spuse mai sus s-a văzut că orice ştiinţă deductivă are o structură generală, care morfologic este aceeaşi. Există dar o schemă logică a construcţiei unei teorii demonstrative, pe care o vom reda mai jos, în modul cel mai general, schemă care constituie anatomia logică a oricărui sistem ştiinţific.

Hilbert spune că o teorie axiomatizată constă în „stabilirea unui schelet de concepte care permit punerea în ordine a unor fapte"[10].

Pentru a avea o idee clară şi distinctă despre diferenţa dintre axiomatica veche şi axiomatica modernă, vom reda schematic modul de construcţie al unei teorii deductive în concepţia lui Aristotel şi în concepţia actuală.

---

[7]. **J. Cavaillès,** *Axiomatique et Système Formel*, Paris, Hermann, 1938, p. 93.

[8] **D. Hilbert,** *Neubegrundüngen der Mathematik*, în „*Hamburger Seminars Einzelschriften*", 1929, p. 173.

[9] Pentru dezvoltări asupra acestei probleme, a se vedea: **A. Dumitriu,** *Axiomatica teoriilor deductive*, în *Probleme de logică*, II, Ed. Academiei R.S.R., 1970.

[10] **D. Hilbert,** *Axiomatisches Denken*, p. 405.

Aristotel enunța textual structura axiomatică a oricărei științe astfel[11]: „Într-adevăr, orice știință demonstrativă presupune trei elemente:

1) ceea ce se pune la început ca existent;

2) așa-numitele axiome, care sînt premisele prime ale demonstrației;

3) atributele al căror înțeles îl acceptă știința".

Metoda de demonstrație prin care se dezvoltă orice știință este silogismul.

Cu alte cuvinte, după Aristotel, structura axiomatică a unei științe este următoarea:

1. *Partea axiomatică*

a) termenii cunoscuți prin ei înșiși;
b) propoziții adevărate prin ele însele.

2. *Partea derivată*

a) termeni definiți (cu ajutorul celor cunoscuți prin ei înșiși sau cu ajutorul celor deja definiți);
b) propoziții derivate, în baza celor admise deja.

3. *Metoda de demonstrație*
(silogismul).

Acum să considerăm structura axiomatică a unei teorii moderne. În această concepție termenii primitivi și propozițiile primitive nu mai sînt admiși prin ei înșiși, ci sînt acceptați convențional; ei vor trebui să îndeplinească anumite condiții, pentru ca, în primul rînd, să nu conducă la contradicții. Schema axiomatică a unei astfel de teorii deductive devine:

1. *Partea axiomatică*

a) termeni primitivi, acceptați convențional;
b) propoziții primitive, acceptate convențional.

2. *Partea derivată*

a) termeni definiți;
b) propoziții demonstrate.

[11] **Aristotel,** *Analytica posteriora*, I, 2, 72 a.

3. *Reguli de derivare*

a) pentru termeni (reguli de definiţie);
b) pentru propoziţii (reguli de deducţie).

După cum se vede, schema morfologică a unei teorii deductive este, în ambele concepţii, *grosso modo* aceeaşi. Ceea ce este schimbat este punctul de plecare: axiomatica modernă acceptă termeni nedefiniţi şi propoziţii nedemonstrate, ca şi aceea veche, dar ea le acceptă în mod arbitrar şi convenţional. Această alegere arbitrară a noţiunilor şi propoziţiilor primitive implică cîteva probleme, care, în mod foarte general, pot fi enumerate astfel: Care este garanţia că ideile şi propoziţiile de la care plecăm nu sînt contradictorii? Cum ne dăm seama că aceste idei şi propoziţii sînt toate primitive şi că printre ele nu se găsesc unele, cel puţin, care să fie definisabile şi demonstrabile cu ajutorul celorlalte? În sfîrşit, cum putem să arătăm că prin alegerea părţii axiomatice, admisă arbitrar, putem deriva efectiv întreaga teorie pe care o urmărim? Aceste probleme, enunţate mai sus în forma lor cea mai generală, sînt sintetizate în următoarele condiţii, pe care trebuie să le satisfacă grupul axiomatic.

Axiomele trebuie să fie:

1. necontradictorii,
2. independente,
3. suficiente.

Acelaşi lucru trebuie spus şi despre ideile primitive: şi ele trebuie să fie necontradictorii, independente şi suficiente.

Aceste condiţii ale grupului axiomatic (sau primitiv) au dat loc la probleme dificile, unele chiar nerezolvabile în mod general şi rezolvabile numai în cazuri particulare.

Axiomatica aristotelică, dominantă pînă la sfîrşitul secolului trecut, se garanta *singură*, fiindcă avea garanţia din afara ei. Axiomatica contemporană, neavînd nici o garanţie din afară, vrea să şi-o găsească în propria ei construcţie, adică vrea să se garanteze *singură*, dar această fundamentare nu este întotdeauna uşoară.

* 2.4. Construcţia unui sistem formal

Adusă în faza finală de abstractizare şi formalizare, o asemenea teorie deductivă ia forma unui joc de simboluri făcut după reguli precise, dar fără nici un conţinut. Vom încerca să descriem trăsăturile caracteristice ale unui asemenea joc, circumscriind astfel noţiunea generală de *sistem formal*[12]. Un asemenea sistem este constituit din simboluri şi reguli de combinare ale acestor simboluri. Dar să dăm mai bine cuvîntul, în această privinţă, lui J. Cavaillès: „Un sistem formal în general este o grupare ierarhică de «asamblări» de semne sau *formule complete* astfel ca, plecînd de la unele din ele (în număr finit sau infinit), considerate ca valabile, să se poată obţine altele prin procedee fixate odată pentru totdeauna"[13].

Modul de construcţie al unui asemenea „sistem" este descris, cel mai clar posibil, de către H.B. Curry[14]. Şi anume, la baza lui stă aşa-numita *structură primitivă*, alcătuită din:

1. *Termeni.* Aceştia sînt:

— *indiciile*, adică semnele iniţiale în care se va lucra;

— *operaţiile*, adică moduri de a combina semnele pentru formarea unor noi termeni;

— *regulile de formare*, care specifică cum se construiesc termenii noi cu ajutorul operaţiilor.

2. *Propoziţii elementare.* Acestea formează o listă de „predicate", arătîndu-se numărul şi felul lor şi enumerînd,

---

[12] În dezvoltarea noţiunii de sistem formal un rol deosebit i-a revenit lui D. Hilbert. El a încercat să fundamenteze întrebuinţarea noţiunilor matematice implicînd infinitul actual — noţiuni faţă de care existau suspiciuni în urma descoperirii unor paradoxe (ce li se atribuiau) — pe baza unor metode finite. Această idee, integrată concepţiei sale (formaliste) despre matematică ca disciplina ce se reduce la studiul unor formalisme, a generat o serie de studii asupra problemelor formalismelor. Ulterior Gödel a demonstrat că cerinţele finitismului fac ca problemele matematicii să nu poată fi absorbite într-un formalism.

[13] **J. Cavaillès,** *Axiomatique et système formel*, p. 101.

[14] **H. B. Curry,** *Outlines of a formalist Philosophy of mathematics*, Amsterdam, 1951, cap. I.

de asemenea, obiectele — „argumentele" — care pot primi aceste predicate.

3. *Teoreme elementare.* Acestea sînt de două feluri:

— *axiomele,* acceptate ca adevărate fără demonstrație;

— *regulile de procedură,* în baza cărora se obțin propoziții „adevărate" noi, în cadrul sistemului.

Pe scurt, într-un sistem formal se dau trei feluri de reguli, determinînd trei clase ale sistemului:

1. clasa componentelor,
2. clasa propozițiilor și
3. clasa teoremelor[15].

Descrierea construcției sistemului, așa cum am făcut-o mai sus, se numește *prezentarea* sa. După aceasta, componentelor primitive li se pot acorda înțelesuri determinate, fiind puse în corespondență cu obiecte bine precizate, în așa fel încît teoremele sistemului să rămînă valabile. Operația poartă numele de *reprezentarea* sistemului[16].

Dacă însă o asemenea „reprezentare" se poate face în domeniul unor enunțuri al căror adevăr sau falsitate nu depind de sistemul considerat și dacă ea se face astfel încît unei axiome sau teoreme din sistem să-i corespundă un asemenea enunț adevărat, atunci s-a obținut o *interpretare* a sistemului. Problema găsirii unei *interpretări* este strîns legată de problema găsirii unui *model* al sistemului dat.

Prin model al unui sistem S se înțelege, de obicei, o mulțime M, astfel încît între cele două mulțimi (S și M) să se stabilească următoarele corespondențe:

1) fiecărei propoziții din S îi corespunde un enunț format cu elementele lui M;

2) enunțurile formate cu elementele din M sînt adevărate sau false independent de S;

3) oricărei propoziții din S îi corespunde un enunț adevărat format cu elemente din M.

De fapt această noțiune este mai complexă. Noi o vom preciza mai mult cînd va fi vorba de sisteme ale logicii.

[15] **J. Ladrière,** *Les limitations internes des formalismes,* Louvain, Paris, 1957, p. 40.

[16] K. Gödel, spre exemplu, a reprezentat formulele unui asemenea sistem prin numere naturale, reprezentare ce poartă și astăzi în literatură numele de „reprezentare Gödel".

Ceea ce trebuie să mai spunem aici este că două asemenea modele M_1 și M_2 ale unui sistem se numesc *izomorfe* dacă între ele se poate stabili o corespondență biunivocă în așa fel încît fiecărui enunț adevărat din M_1 să-i corespundă un enunț adevărat din M_2 și invers[17].

Regulile precise ale unui sistem formal ne permit să formăm anumite expresii și să le înlănțuim în anume moduri. Prin urmare ele ne învață „să vorbim" într-un mod riguros. Sau, așa cum se exprimă logicienii actuali, „să vorbim o limbă formalizată".

La rîndul ei, această „limbă", adică însuși sistemul, poate deveni obiect de studiu, studiu care se face utilizînd de asemenea o limbă formalizată. Datorită unor antinomii (paradoxe) ivite într-un asemenea studiu, specialiștii au hotărît să deosebească cele două „limbaje" ca avînd „niveluri" diferite. Anume, primul este socotit o *limbă-obiect* despre care al doilea tratează, acesta din urmă purtînd numele de *metalimbă*. Vom mai avea ocazia în cursul acestei lucrări să pomenim distincția menționată. Această idee a condus la distincția făcută de logicieni între un *sistem* S și *metasistemul* lui, S', care vorbește despre proprietățile primului.

* 2.5. Condițiile grupului axiomatic

După cum am arătat la sfîrșitul paragrafului *2.3, grupul axiomatic al oricărei teorii deductive trebuie să satisfacă trei condiții: necontradicția, independența și suficiența. Acestea se traduc în trei proprietăți de ordin

[17] În această privință există o literatură bogată, din care citām doar pe **G. Kreisel** și **J. L. Krivine,** *Elements de Logique Mathématique — Théorie des Modèles*, Paris, 1967; **A. Robinson,** *Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra*, Amsterdam, 1963. Faptul, demonstrat de altfel, că un anume sistem poate avea mai multe modele izomorfe, indică imposibilitatea sa de a reprezenta în mod specific un anume domeniu în contrast cu toate celelalte.

formal pe care sistemul respectiv trebuie să le îndeplinească, şi anume: *necontradicţia* axiomelor, *independenţa* şi *completitudinea* lor. Le vom preciza pe scurt în cele ce urmează.

* 2.5.1. Necontradicţia axiomelor

Există o proprietate a sistemului formal (mai precis a grupului său axiomatic), în conformitate cu care nici o contradicţie nu se poate deriva din axiomele date, în interiorul său. Adică, nu se pot deriva simultan în sistem o propoziţie şi contradictoria sa[18], căci s-a demonstrat că dacă o singură contradicţie ar fi derivabilă, în mod automat, orice propoziţie ar fi derivabilă. Prin urmare orice propoziţie, de îndată ce a putut fi formulată, prin însuşi acest fapt devine, într-un astfel de sistem, adevărată.

Problema demonstrării necontradicţiei unei teorii deductive este, din acest motiv, capitală, căci apariţia unei singure contradicţii înăuntrul unui sistem provoacă dizoluţia întregului sistem. Chiar şi sub această formă generală, în care am enunţat-o mai sus, rezolvarea problemei necontradicţiei este foarte dificilă şi a rămas în multe cazuri deschisă. După cum vom vedea însă, în cazurile mai simple ale unor sisteme de logică, acest lucru a putut fi arătat.

* 2.5.2. Independenţa axiomelor

Concepută mai întîi ca o exigenţă de economie (conform adagiului occamist, principiile nu trebuie multiplicate), această proprietate a fost transformată de logicienii moderni în posibilitatea de a extrage din sau introduce în grupul axiomelor, *ad placitum*, una din componentele

[18] Noţiunea de propoziţie contradictorie a unei alte propoziţii va fi precizată mai de aproape în cursul acestei lucrări.

sale. Ceea ce s-a produs sub influența binecunoscutului exemplu dat de postulatul euclidian al paralelelor și despre care am mai avut ocazia să vorbim în cursul acestui capitol[19].

Într-un sistem formal, proprietatea de care este vorba se poate exprima pe scurt astfel: nici una dintre axiomele sistemului nu poate fi derivată în interiorul său, utilizîndu-le doar pe celelalte.

Acest lucru, după cum s-a arătat în lucrările de specialitate, echivalează cu următoarea posibilitate: dîndu-se un sistem S necontradictoriu care are un număr n de axiome: $A_1, A_2, \ldots, A_n$, dacă se scoate una din aceste axiome, A_k, și se înlocuiește cu contradictoria ei, non-A_k, se obține de asemenea un sistem necontradictoriu. În acest caz este sigur că axioma A_k este independentă în raport cu grupul celorlalte axiome ale sistemului.

* 2.5.3. Suficiența axiomelor

Ne vom referi acum, pe scurt, la proprietatea ce decurge din a treia condiție formulată la sfîrșitul paragrafului *2.3, și anume *suficiența axiomelor. Grosso modo*, ea poate fi enunțată astfel: un sistem de axiome este suficient dacă din el se poate deriva întreaga teorie respectivă. Această noțiune primește o serie de specializări, mai ales în sistemele formale, în care este cunoscută sub numele de *completitudine*. Vom menționa aceste sensuri speciale ale „suficienței", atunci cînd va fi cazul, în cursul expunerii noastre.

Aceasta este cea mai dificilă și cea mai complexă dintre problemele puse pînă acum în legătură cu sistemele axio-

[19] Nu vom discuta aici consecințele logico-filozofice ale unei asemenea poziții. Am făcut-o în lucrarea noastră *Mecanismul logic al matematicilor*, 78 (Editura Academiei, 1968). A se vedea, de asemenea, și studiul nostru *La structure axiomatique de la science moderne* („Scientia", Milano, 1970).

matice și a putut fi rezolvată numai în anumite cazuri. Pentru o serie de alte sisteme s-a putut arăta însă că ea este insolubilă[20].

* 2.6. Construcția logicii ca sistem formal

Am arătat în ambianța căror idei s-a ajuns să se construiască și logica, după metoda axiomatică modernă, ca o teorie matematică. Concepția aceasta a condus, în ultimă instanță, la prezentarea ei sub forma abstractă de *sistem formal*. De la primele încercări făcute de G. Frege în 1879 și pînă în ziua de astăzi, întreprinderile de acest fel au luat o amploare considerabilă. Se cunosc zeci de asemenea sisteme formale[21]. Toate îmbracă însă aspectul abstract al jocului de simboluri goale de conținut și supuse condițiilor rezumate mai înainte.

Vom urmări în această lucrare doar cîteva dintre ele. De fiecare dată nu ne vom lăsa însă conduși numai de jocul gratuit al semnelor, ci vom căuta să evidențiem cum e ghidat sistemul de interpretarea logică. Sistem și interpretare vor face astfel corp comun, deși ne vom opri, din cînd în cînd, pentru a observa ce parte revine fiecăruia.

Odată familiarizați cu particularitățile acestor sisteme, vom analiza într-un paragraf final cum se pun și cum se rezolvă, pentru ele, prin metode de asemenea formale, problemele de necontradicție și independență.

---

[20] Evident, cele trei condiții de care am vorbit mai sus capătă diverse nuanțe și formulări după punctul de vedere din care sînt privite. Aceste diverse enunțări ale condițiilor citate nu ne-au interesat în această lucrare, întrucît obiectivul urmărit este polivalența logică. Pentru dezvoltări a se vedea **A. Dumitriu,** *Istoria logicii*, 47.3.3.

[21] A se vedea **A. Dumitriu,** *Istoria logicii*, 48.2.

3
Logica bivalentă

A. Calculul propoziţional

* 3.1. Principia Mathematica

Vom expune în cele ce urmează sistemul formal al logicii aşa cum apare în monumentala lucrare a lui A.N. Whitehead şi B. Russell, *Principia Mathematica* (1910)[1]. Această lucrare sintetizează toate rezultatele obţinute de logicienii matematicieni pînă atunci, şi în special acelea din scrierile lui G. Frege şi G. Peano[2].

Ea conţine principalele idei care stau la baza unei asemenea construcţii şi care au rămas valabile pînă astăzi. Completate şi dezvoltate ulterior, în special în ceea ce priveşte calculul funcţiilor, de nu mai puţin celebrele *Grundzüge der theoretischen Logik* (1928) a lui D. Hilbert şi W. Ackermann şi *Grundlagen der Mathematik* (vol. I, 1934 şi vol. II, 1938) a lui D. Hilbert şi P. Bernays, aceste

[1] Cambridge University Press; ediţia întîi a apărut astfel: vol. I, 1910; vol. II, 1912; vol. III, 1913. Primul volum al ediţiei a doua a apărut în 1925, celelalte în 1927.

[2] **G. Peano,** *Formulario Mathematico* (operă în 5 ediţii, primele fragmente apărute în 1897; a se vedea *Opere Scelte*, Roma, 1958). Primul sistem formal de logică a propoziţiilor (calcul propoziţional) a fost propus de **G. Frege** în *Begriffsschrift* (1879), autorii *Principiilor* bazîndu-se pe opera acestuia şi a lui G. Peano. Totuşi gradul de maturitate la care ajunge astfel logica matematică face din *Principii* momentul crucial al acestei discipline.

lucrări constituie o *summa* a logicii matematice. Nu vom putea cuprinde în capitolul de față decît cîteva noțiuni generale și cu caracter introductiv asupra a două părți din această disciplină — și anume cele de logică propriu-zisă —, *calculul propozițional* și *calculul funcțiilor propoziționale*. *Principia Mathematica* mai dezvoltă o teorie a claselor și a relațiilor, precum și aplicarea întregului aparat formal la studiul matematicilor, de care nu ne vom ocupa aici.

Ceea ce distinge calculul propozițional de restul logicii este faptul că accentul nu mai cade pe concept, ci pe propoziții. Elementul inițial este propoziția, dar propoziția nu trebuie confundată cu actul vorbirii sau al gîndirii, ci este ceva care este adevărat sau fals. Într-o astfel de propoziție nu se distinge nimic; nici subiect, nici predicat. Ea este o unitate primitivă cu o singură proprietate, aceea de a putea lua două valori: adevărat și fals. De aceea logica *Principiilor* este o logică bivalentă — de altfel ca și cea clasică —, acceptînd pentru o propoziție oarecare numai două valori de adevăr. O „valoare de adevăr" a unei propoziții *(truth value)* va fi *adevărul* dacă propoziția este adevărată și *falsul* dacă propoziția este falsă.

* 3.2. Idei primitive

Să considerăm ideile primitive de la care pleacă Whitehead și Russell. Le vom enumera în ordinea care ni se pare mai naturală.

1. *Propoziții elementare*. O propoziție elementară este aceea care nu conține nimic variabil; este o propoziție care exprimă comportamente fizice stabilite prin observație și experiență. De exemplu, propozițiile „soarele este strălucitor", „cangurul trăiește în Australia" etc., unde este ceva dat de simțuri, sînt propoziții elementare.

Astfel de propoziții, privite ca unități, unde nu este de distins nici un concept, vor fi reprezentate prin litere: p, q, r, s... În fond ele reprezintă variabile ce pot

lua două valori: adevărul şi falsul. Conţinutul propoziţiilor nu va interveni în nici un fel în cele ce urmează.

Logica din *Principia Mathematica* este deci o logică formală fiindcă face abstracţie de conţinutul propoziţiilor.

2. *Negaţia.* Dacă p este o propoziţie, negaţia ei, adică propoziţia „non-p" sau „p este fals" va fi reprezentată prin „$\sim p$"[3].

3. *Disjuncţia.* Se pot construi agregate de propoziţii ca şi în limbajul obişnuit, plecîndu-se de la propoziţii elementare — care mai sînt numite de Russell şi *atomice*; se pot forma astfel fraze, agregate logice de propoziţii, după expresia lui Russell, propoziţii *moleculare.*

Articulaţia dintre propoziţiile elementare, pentru a forma agregate logice, se face prin conjuncţii.

De exemplu conjuncţia „sau" serveşte pentru a uni două propoziţii oarecare, formîndu-se agregatul logic „p sau q". De pildă, propoziţia moleculară „afară plouă sau ninge":

p = afară plouă
q = (afară) ninge.

O asemenea articulaţie între propoziţii se numeşte o *disjuncţie logică* sau *sumă logică* şi se notează în simboluri:

„$p \vee q$"

Citirea este simplă: p sau q. Ce înseamnă însă „$p \vee q$"? Ce înseamnă „afară plouă sau ninge"? Nimic altceva decît că sau prima propoziţie este adevărată, sau a doua. Disjuncţia logică „$p \vee q$" este o afirmaţie alternă care exprimă că sau prima propoziţie este adevărată, sau a doua (cel puţin una). Iată dar definiţia disjuncţiei „$p \vee q$".

În condiţiile acestea, putem cerceta cum intră semnul „$\sim$", de negaţie, în disjuncţie. Aşa „$\sim p \vee q$" va însemna: „p este fals sau q este adevărat"; „$\sim (p \vee q)$" va semnifica „este fals că sau p sau q este adevărat", care este acelaşi lucru cu a spune „p şi q sînt amîndouă false".

[3] Negaţia aici nu are nimic comun cu negaţia în sens filozofic, deci nici cu negaţia dialectică.

4. *Definiția.* „O definiție este o declarație că un nou simbol introdus sau o combinație de simboluri este același lucru ca o altă combinație de simboluri al căror sens este deja cunoscut"[4].

Simbolul prin care se exprimă definiția este „ = " și termenul care trebuie definit se numește *definiendum*, iar cel care definește, *definiens*. În dreptul unei expresii care conține semnul definitoriu „ = " trebuie scris *Df.*, pentru că în alte expresii semnul „ = " poate avea altă semnificație decît acela de definiție. Semnul „ = " va fi citit: „se definește" sau „este același lucru ca și".

5. *Conjuncția.* Tot astfel, după cum două propoziții s-au articulat între ele prin conjuncția „sau", dînd disjuncția logică, putem să legăm două propoziții oarecare prin conjuncția „și". Agregatul logic „p și q" va însemna afirmația simultană a lui p și q; „p și q sînt amîndouă adevărate". O astfel de legătură logică între propoziții se va numi o *conjuncție logică* sau un *produs logic.* De pildă, propoziția moleculară „afară plouă și ninge" afirmă că propozițiile:

p = afară plouă
q = (afară) ninge

sînt adevărate simultan.

Simbolic, conjuncția logică este reprezentată de un punct pus între propozițiile respective:

„$p \cdot q$"

Lectura acestei expresii este: „p și q".

Russell nu vrea să introducă produsul logic „$p \cdot q$" ca idee primitivă, ci îl definește cu ajutorul disjuncției logice. Într-adevăr, dacă scriem, prin definiție:

$$p \cdot q = \sim (\sim p \vee \sim q) \qquad Df.$$

se vede că am scris că „p și q" este același lucru cu „este fals că sau p este fals sau q este fals", ceea ce este exact „p și q sînt adevărate amîndouă".

---

[4] *Principia Mathematica*, vol. I, p. 11.

6. *Implicația.* În general, se spune că o propoziție p *implică* pe alta q cînd q urmează din p; cu alte cuvinte, dacă p este adevărată și q este adevărată. Russell dă o definiție mult mai largă și destul de dificilă, la prima vedere; el însuși se teme că ar putea apărea drept artificială[5]. Ideea esențială de la care pleacă Russell este că o propoziție adevărată implică o propoziție adevărată *(„What is implied by a true proposition is true")*. Dar o asemenea proprietate nu trebuie să determine nimic în cazul cînd prima propoziție este falsă. Singurul lucru pe care-l afirmă implicația este că dacă p implică q nu poate fi cazul ca prima propoziție să fie adevărată și a doua falsă. Cu alte cuvinte, ideea pe care o exprimă implicația russelliană este că toate cazurile pot fi posibile, afară de acela ca propoziția întîia să fie adevărată și a doua să fie falsă. Ideea logică de implicație va fi exprimată simbolic astfel:

$$„p \supset q"$$

și se va citi: „p implică q". Din cele ce am spus pînă acum rezultă că putem defini implicația în felul următor:

$$p \supset q = \sim p \vee q \qquad Df.$$

Această definiție mai largă înseamnă: sau p este fals sau q este adevărat; așadar, dacă p este adevărat, q este adevărat. Membrul întîi *(p)* al implicației se numește *implicans*, iar membrul al doilea *implicat*. Vom reveni, mai departe, asupra sensului implicației.

7. *Punctuația.* Pentru a arăta că un anume semn se referă la o expresie logică întreagă, se închide acea expresie în paranteză.

Spre exemplu am scris:

$$p \cdot q = \sim (\sim p \vee \sim q)$$

pentru a arăta că semnul prim de negație se referă la disjuncția logică „$\sim p \vee \sim q$" întreagă. De asemenea se întrebuințează, în același scop, punctuația pentru a despărți diversele părți ale unei expresii logice (formule logice),

[5] *Principia Mathematica*, vol. I, p. 98.

părți care trebuie luate ca un tot. De pildă, definiția implicației poate fi scrisă cu ajutorul punctelor:

$$p \supset q \;.=.\; \sim p \vee q \qquad Df.$$

Aceasta arată că semnul de definiție „=" funcționează între întreaga expresie „$p \supset q$" și întreaga expresie din dreapta, „$\sim p \vee q$". Cînd s-a întrebuințat deja un punct, pentru a exprima un alt domeniu pînă unde se întinde puterea unui simbol se întrebuințează două puncte, apoi trei etc. Domeniul pe care-l indică un punct este pînă la sfîrșitul unei propoziții moleculare sau pînă la un număr diferit de puncte.

8. *Semnul de aserțiune.* O propoziție poate fi afirmată sau numai considerată. De pildă, dacă spunem propoziția „Cezar a trecut Rubiconul", am afirmat această propoziție, pe cînd dacă spunem „*Cezar a trecut Rubiconul* este o propoziție", propoziția nu mai este afirmată, ci numai luată în considerare[6].

În limbajul obișnuit se recunoaște imediat că o propoziție este numai luată în considerare după vorbele care o precedă și care o fac ipotetică: dacă... *(if so-and-so)*.

Simbolul întrebuințat de Frege pentru ideea de aserțiune și pe care l-a adoptat și Russell este „$\vdash$". Dacă scriem:

$$\vdash . p$$

înseamnă „p este afirmat". Dacă însă punem acest semn înaintea unei implicații, de exemplu:

$$\vdash . p \supset q,$$

trebuie citit: „este adevărat că p implică q"; cu alte cuvinte semnul „$\vdash$" se referă acum la semnul „$\supset$", iar propozițiile p și q sînt numai considerate; despre ele nu afirmăm nimic.

9. *Inferența.* Să presupunem că se afirmă propoziția p și că se mai afirmă și propoziția $p \supset q$, adică:

$$\vdash . p$$

$$\vdash . p \supset q$$

[6] *Principia Mathematica*, vol. I, p. 96.

În condiţiile acestea, dacă p este adevărat, şi dacă este adevărat că p implică q, urmează că şi q este adevărat, după definiţia implicaţiei (o propoziţie adevărată nu poate implica una falsă).

Aşadar, din aserţiunile de mai sus scoatem aserţiunea lui q:

$\vdash . q$

Se vede dar cum poate servi implicaţia russelliană la deducţia unui adevăr. În cazul acesta, şi numai acesta, implicaţia are rolul unei deducţii, caz cunoscut şi în logica veche sub numele de *modus ponens*.

După cum se vede, o inferenţă este cu totul altceva decît o implicaţie, şi numai într-un caz particular al implicaţiei, cînd se afirmă şi adevărul primului membru, poate fi ea aplicată. Russell zice că o inferenţă este disoluţia unei implicaţii. Niciodată o implicaţie nu este o deducţie, dar poate servi, în cazul cînd e afirmată, la o deducţie prin *modus ponens*.

* 3.3. Funcţii de adevăr

Pentru a înţelege mai exact ce reprezintă o disjuncţie, o *conjuncţie* sau o *implicaţie* logică, să facem să intervină ideea de funcţie, şi anume aceea de funcţie de adevăr. Am văzut că o propoziţie arbitrară p poate lua două valori de adevăr: falsul şi adevărul. Dacă, în general, ne gîndim la ceea ce înseamnă o funcţie în matematică, adică o variabilă ale cărei valori depind de valorile altei variabile, putem imagina şi în logică funcţii logice. O funcţie logică va fi o expresie în care vor intra una sau mai multe variabile şi care va deveni de fiecare dată o propoziţie cînd se atribuie variabilelor semnificaţii determinate. Din această cauză, Russell a numit funcţiile logice funcţii propoziţionale.

Fie de exemplu expresia „$p \vee q$"; se vede imediat că aceasta este o funcție propozițională cu două argumente, p și q:

$$f(p,q) = p \vee q$$

Este interesant aici faptul că valoarea de adevăr a funcției f depinde numai de valorile de adevăr ale argumentelor p și q și, în nici un fel, de conținutul lor. Într-adevăr, după definiție, $f(p,q)$ este în cazul nostru „$p \vee q$", adică cel puțin unul din argumente trebuie să fie adevărat. Să presupunem că p este adevărat și q este fals, atunci definiția este satisfăcută, „$p \vee q$" este adevărată și tot așa $f(p,q)$ care o reprezintă. Să presupunem că p este fals și q este adevărat; definiția este satisfăcută și deci expresia „$p \vee q$" este adevărată, așadar și $f(p,q)$. Alt caz ar fi cînd și p și q ar fi adevărate amîndouă, deci $f(p,q)$ ar fi iarăși adevărată. În sfîrșit, dacă p este fals și q este fals, atunci definiția lui „$p \vee q$" nu este satisfăcută și $f(p,q)$ este falsă. Aceste rezultate pot fi examinate direct pe un exemplu. Fie disjuncția logică „afară plouă sau ninge". Funcția noastră este:

p = afară plouă

q = (afară) ninge

$f(p,q)$ = afară plouă sau ninge = $p \vee q$

Să presupunem: 1) p este adevărat și q fals (afară plouă, dar nu ninge); propoziția „afară plouă sau ninge" exprimă un adevăr, $f(p,q)$ este adevărată în cazul acesta; 2) să presupunem că propoziția p este falsă și q adevărată (afară nu plouă, dar ninge); propoziția „afară plouă sau ninge" exprimă un adevăr, $f(p,q)$ este adevărată; 3) dacă și p și q sînt amîndouă adevărate (adică dacă afară plouă și ninge simultan), propoziția „afară plouă sau ninge" este adevărată, adică $f(p,q)$ este adevărată; 4) în fine, dacă și p și q sînt false, propoziția „afară plouă sau ninge" nu exprimă un adevăr, deci este falsă ca și $f(p,q)$, care o reprezintă.

Se poate deci conchide, în general, că dacă avem o disjuncție logică $f(p,q) = p \vee q$, ea este adevărată dacă unul din argumente este adevărat sau amîndouă și este falsă numai cînd amîndouă argumentele sînt false. *Este de remarcat aici faptul că putem ști cînd o funcție de felul acesta $f(p,q)$ este falsă sau adevărată fără a ne interesa de loc de conținutul argumentelor.*

Valorile de adevăr ale funcției depind numai de valorile de adevăr ale argumentelor, fără a face să intervină, în nici un fel, semnificația lor. De aceea Russell a numit aceste funcții *funcții de adevăr.*

Este evident că și funcțiile:

$$f(p) = \sim p$$

$$f(p,q) = p \cdot q$$

$$f(p,q) = p \supset q$$

sînt funcții de adevăr, ca și toate funcțiile în care argumentele sînt propoziții. Problema dacă toate funcțiile din logică și din știință sînt funcții de adevăr nu este încă definitiv soluționată[7].

Să studiem, odată cu Wittgenstein[8], funcțiile de adevăr. Pentru aceasta vom nota, pe scurt, adevărul cu A și falsul cu F. Am introdus pînă acum numai funcțiile de adevăr: negația, disjuncția, conjuncția și implicația. Vom mai defini două, foarte utilizate: *echivalența* și *incompatibilitatea.*

Două propoziții vor fi echivalente dacă ele sînt adevărate sau false în același timp, adică dacă au aceeași valoare de adevăr.

Semnul de echivalență este „$\equiv$".

Așadar:

$$f(p,q) \cdot = \cdot \; p \equiv q \qquad Df.$$

---

[7] Lewis, spre exemplu, a contestat această părere (**C. I. Lewis & C. H. Langford,** *Symbolic Logic*, II, ed. 1959, p. 147, 200, 234).

[8] **Ludwig Wittgen·tein,** *Tractatus Logico-Philosophicus*, prop. 4. 442 (Ed. Kegan Paul, London, 1933). Schemele care urmează se datoresc acestui logician.

Incompatibilitatea exprimă o funcţie de adevăr în care argumentele nu pot fi adevărate în acelaşi timp, prin urmare cel puţin unul este fals. Semnul de incompatibilitate este „ | “, aşa că putem scrie:

$$f(p,q) = p \mid q \qquad Df.$$

Acest semn se va citi: „p incompatibil cu q“.

Să analizăm acum aceste funcţii de adevăr. Argumentul p poate lua valoarea A sau F; argumentul q poate lua valoarea A sau F. Aceste valori pot fi combinate în următoarele patru moduri: 1) p adevărat şi q adevărat (AA); 2) p fals şi q adevărat (FA); 3) p adevărat şi q fals (AF); 4) p fals şi q fals (FF).

Vom păstra această ordine pentru studiul tuturor funcţiilor de adevăr cu două argumente.

Dacă luăm acum funcţia de adevăr, de exemplu conjuncţia logică

$$f(p,q) = p \cdot q,$$

este uşor de văzut ce valori de adevăr corespund pentru ea cînd se atribuie unul din aranjamentele de mai sus ale valorilor de adevăr pentru argumentele p şi q. Putem, astfel, să construim următorul tabel simplu, în care se citesc imediat valorile de adevăr pe linia corespunzătoare fiecărui aranjament.

	p	q	$p \cdot q$
1.	A	A	A
2.	F	A	F
3.	A	F	F
4.	F	F	F

Vom putea acum să scriem pentru toate funcţiile de adevăr definite un asemenea tabel, în care să se vadă imediat ce valori de adevăr le corespund. Vom face un singur tabel care să le cuprindă pe toate.

Mai întîi, pentru negație avem:

p	$\sim p$
A	F
F	A

Pentru celelalte funcții de adevăr găsim tabelul următor:

	p	q	$p \vee q$	$p \cdot q$	$p \supset q$	$p \equiv q$	$p \mid q$
1.	A	A	A	A	A	A	F
2.	F	A	A	F	A	F	A
3.	A	F	A	F	F	F	A
4.	F	F	F	F	A	A	A

Se vede că pentru fiecare din aceste funcții de adevăr cu două argumente corespund, în ordinea aranjamentelor valorilor de adevăr ale argumentelor, o grupă de valori caracteristică fiecăreia. De exemplu, pentru „$p \supset q$" corespunde grupa $AAFA$, pentru $p \vee q$, grupa $AAAF$ etc.

Putem spune că o grupă din acestea caracterizează pe deplin funcția de adevăr corespunzătoare, și după fiecare putem recunoaște ce fel de funcție particulară avem.

Cîte funcții de adevăr cu două argumente putem avea? Cîte grupe de acestea putem face, fiindcă fiecăreia îi va corespunde una. Cu două litere A și F se pot face aranjamente cu repetiție în număr de $2^{2^2} = 2^4 = 16$. Așadar, avem în total 16 funcții de adevăr cu două argumente. Wittgenstein a calculat că pentru n argumente $p, q, r, \ldots$ vom avea, în mod analog, 2^{2^n} funcții de adevăr $f(p,q,r\ldots)$.

Funcțiile noastre nu sînt toate independente, unele putînd fi exprimate prin altele. Am văzut că:

$$p \cdot q \cdot = \cdot \sim (\sim p \vee \sim q)$$

și

$$p \supset q \cdot = \cdot \sim p \vee q$$

Nicod a arătat că dacă se ia semnul de incompatibilitate ca nedefinit, ca semn primitiv, se pot exprima toate funcțiile de adevăr cu două argumente cu ajutorul lui[9].

Iată, de exemplu, cum se pot defini funcțiile noastre:

$$\sim p \cdot = \cdot p \mid p$$

$$p \vee q \cdot = \cdot (p \mid p) \mid (q \mid q)$$

$$p \cdot q \cdot = \cdot (p \mid q) \mid (p \mid q)$$

$$p \supset q \cdot = \cdot p \mid (q \mid q)$$

Acestea sînt evidente. De exemplu $p \mid p$ înseamnă p este fals; $p \supset q$ înseamnă $p \mid (q \mid q)$, adică „p este adevărat este incompatibil cu q este fals" etc.

Am căutat să analizăm sumar funcțiile de adevăr[10] pentru a ne da seama mai bine ce anume înseamnă articulațiile logice între propozițiile p, q, r... Propozițiile p, q sînt numai considerate, nu se afirmă nimic despre ele, iar legăturile dintre ele nu determină nimic cu privire la p și q; cu alte cuvinte $p \vee q$, $p \cdot q$, $p \supset q$ etc. sînt legi de compoziție, care consideră argumentele numai în mod ipotetic; ele nu exprimă *relații* între argumente, ci posibilități de compoziție. Să luăm implicația. Expresia „din p rezultă q" nu traduce exact simbolul „$\supset$" și de aici pot rezulta o mulțime de confuzii[11]. Implicația nu este decît o lege de compoziție care lasă libertatea argumentelor să ia orice valori afară de acelea care ar însemna că primul argument este adevărat și al doilea fals, după cum din $p \vee q$ sau din $\sim p \vee q$ nu rezultă absolut nimic. Această semnificație pe care o atribuie Russell implicației trebuie

---

[9] **J. Nicod,** *A reduction in the number of the primitive propositions of logic* („Proceedings of the London Mathematical Society", vol. XIX, Jan., 1917).

[10] O analiză mai completă cititorul o găsește în lucrarea noastră *Logica nouă*, București, 1940.

[11] Rudolf Carnap scrie: „Că Russell a ales pentru legătura dintre propoziții caracterizată prin grupa *A A F A* denumirea «implicație» a avut o urmare nefericită... Unii care remarcă deosebirea dintre implicație și relația de consecință cred totuși că semnul de implicație poate să exprime relația de consecință" (*Logische Syntax der Sprache*. Springer, Wien, 1934, p. 198).

reţinută ca fundamentală. Numai această semnificaţie face ca funcţiile propoziţionale să fie independente de conţinutul pe care eventual l-am atribuit argumentelor şi tocmai acest rezultat arată că logica s-a formalizat, dacă înţelegem prin formal „independent de conţinut"[12]. Pentru a învedera lucrul acesta, să luăm două propoziţii arbitrare: p = „$2 + 2 = 5$" şi q = „Bucureşti este un oraş în România". Ei bine, deşi în limbajul curent nu vom întîlni astfel de propoziţii, în logica formală russelliană propoziţia

«„$2 + 2 = 5$" sau „Bucureşti este un oraş în România"»

este o propoziţie adevărată, fiindcă o disjuncţie logică este adevărată dacă cel puţin una din propoziţii este adevărată (aici prima este falsă şi a doua adevărată). Tot astfel propoziţia

«„Bucureşti este un oraş în România" implică „$2 + 2 = 5$"»

este o propoziţie falsă, fiindcă o propoziţie adevărată nu implică una falsă. Acest lucru se vede mai uşor dacă utilizăm definiţia implicaţiei:

$$p \supset q \cdot = \cdot \sim p \vee q$$

În cazul nostru, avem:

«$\sim$(„$2+2=5$") sau „Bucureşti este un oraş în România"». Adică: este fals că „$2 + 2 = 5$" sau este adevărat că „Bucureşti este un oraş în România". Însă în cazul cînd ambele propoziţii ale unei disjuncţii logice sînt adevărate, disjuncţia este adevărată. Prin urmare, în sensul acesta, o propoziţie falsă poate să implice una adevărată. Din schemele de mai înainte se vede că $p \supset q$ este totdeauna adevărat dacă q este adevărat şi totdeauna adevărat dacă p este fals, indiferent de ce valori ia celălalt argument.

Aceste rezultate sînt evidente dacă ţinem seama că p şi q nu au nici o semnificaţie.

---

[12] „Independent de conţinut" nu se referă la truismul epistemologic că orice formă logică are un conţinut, ci la principiul extensionalităţii, care face abstracţie de conţinuturi determinate.

3.4. Propoziţii primitive

În orice teorie deductivă se dau mai întîi cîteva idei primitive şi cîteva propoziţii primitive care se iau ca axiome, după care se deduc teoremele teoriei[13]. Ideile primitive ale sistemului lui Whitehead şi Russell am văzut că sînt: ideea de a reprezenta propoziţiile prin variabilele p, q, r...; ideea de negaţie „$\sim$"; ideea de disjuncţie „$\vee$"; ideea de implicaţie „$\supset$"; ideea de inferenţă. S-ar putea spune că aceasta este întreaga logică a propoziţiilor, fiindcă cu ajutorul acestor idei ea poate fi construită în întregime.

Noţiunea de implicaţie este definită de Russell cum am văzut[14]:

$$1.01 \quad p \supset q \,.\, = \,.\, \sim p \vee q \qquad Df.$$

Russell pune în dreptul unei propoziţii, odată cu Peano, literele „*Pp*", care înseamnă tocmai „*primitive proposition*".

Mai departe avem:

1.1 Orice este implicat de o propoziţie adevărată este adevărat. *Pp.*

Această propoziţie diferă de *modus ponens* fiindcă acolo se spune: dacă p este adevărat şi dacă implicaţia $p \supset q$ este adevărată, atunci şi q este adevărat. Adevărul lui p este o ipoteză în inferenţa zisă *modus ponens*, iar aici este un fapt[15].

$$1.2 \quad \vdash : p \vee p \,.\supset.\, p \qquad Pp.$$

Propoziţia aceasta afirmă: „Dacă p sau p este adevărat, atunci p este adevărat", ceea ce este evident. Ea poartă

---

[13] Aici ideea de axiome are un înţeles mai larg decît cel obişnuit pe care l-am întrebuinţat în cap. 2 şi-l vom utiliza şi de aici încolo, acela de formulă considerată adevărată fără o demonstraţie.

[14] Vom păstra ordinea şi numerotarea formulelor utilizată de autori în *Principia Mathematica.*

[15] *Principia Mathematica*, vol. I, p. 99.

numele de „principiul tautologiei" şi se va însemna pe scurt cu „*Taut*".

1.3 $\vdash : q . \supset . p \vee q$ *Pp.*

Adică „dacă q este adevărat atunci sau p sau q este adevărat", ceea ce este evident. De exemplu, fie $q =$ „astăzi este marţi" şi $p =$ „astăzi este miercuri", atunci propoziţia 1.3 spune „dacă astăzi este marţi, atunci astăzi este marţi sau miercuri". Principiul acesta este numit „principiul adiţiunii", fiindcă afirmă că dacă o propoziţie este adevărată, orice alternativă poate să-i fie adăugată fără a o face falsă. Propoziţia 1.3 va fi însemnată pe scurt cu „*Add*" (de la *Addition*).

1.4 $\vdash : p \vee q . \supset . q \vee p$ *Pp.*

Adică „p sau q implică q sau p". Este legea comutativităţii (Russell o numeşte a permutării) şi va fi însemnată pe scurt cu „*Perm*" *(Permutation)*.

1.5 $\vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . q \vee (p \vee r)$ *Pp.*

Principiul acesta spune: „Dacă sau p este adevărat sau $q \vee r$ este adevărat, atunci sau q sau $p \vee r$ este adevărat". Este una din formele legii asociaţiei logice şi se numeşte principiul asociaţiei, însemnat pe scurt cu „*Assoc*". Tot aşa putem scrie:

$$p \vee (q \vee r) . \supset . (p \vee q) \vee r$$

1.6 $\vdash :. q \supset r : \supset : p \vee q . \supset . p \vee r$ *Pp.*

„Dacă q implică r, atunci p sau q implică p sau r".

Cu alte cuvinte, într-o implicaţie poate fi adăugată aceeaşi propoziţie la ambii membri fără să modifice valoarea de adevăr a implicaţiei. Principiul va fi numit principiul de însumare *(Summation)* şi va fi notat pe scurt cu „*Sum*".

1.7 Dacă p este o propoziţie elementară şi $\sim p$ este o propoziţie elementară. *Pp.*

1.71 Dacă p şi q sînt propoziţii elementare şi $p \vee q$ este o propoziţie elementară. *Pp.*

Cu alte cuvinte, sistemul formal al calculului propozițional din *Principia Mathematica*, conform celor discutate în cap. 2, se constituie după cum urmează.

Simbolurile primitive sînt variabilele propoziționale, precum și simbolurile „$\sim$" (negația), „$\vee$" (disjuncția), parantezele și punctele[16]. Din ele se pot obține formule, combinîndu-le după următoarele reguli:

1. O variabilă propozițională este o formulă.
2. Dacă A este o formulă, $\sim A$ este de asemenea o formulă.
3. Dacă A și B sînt formule, $(A \vee B)$ este de asemenea o formulă.

Parantezele vor putea fi înlocuite prin puncte, așa cum am arătat mai înainte.

Drept axiome se aleg următoarele cinci formule:

1. $\vdash : p \vee p . \supset . p$
2. $\vdash : q . \supset . p \vee q$
3. $\vdash : p \vee q . \supset . q \vee p$
4. $\vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . q \vee (p \vee r)$
5. $\vdash :. q \supset r : \supset : p \vee q . \supset . p \vee r,$

în care $p \supset q$ este o scriere abreviată a formulei $\sim p \vee q$.

După cum a arătat P. Bernays, cele cinci axiome nu sînt independente; axioma 4 poate fi dedusă din celelalte (vezi *9.2) și deci se poate renunța la ea.

Regulile de inferență sînt substituția și *modus ponens*, care vor fi explicate în cele ce urmează.

* 3.5. Consecințele imediate ale propozițiilor primitive

Propozițiile care urmează vor fi consecințe ale propozițiilor primitive.

[16] Am numit aici *simboluri primitive* ceea ce Curry (*2.4) numește *indicii* și *operații*.

Demonstrația lor va consta în a arăta că ele se deduc din aceste propoziții prin una din următoarele metode de deducție.

1. *Metoda substituției.* În orice formulă adevărată (axiomă sau formulă deja demonstrată) se pot înlocui literele prin orice propoziție simplă sau moleculară cu condiția ca aceeași literă să fie înlocuită pretutindeni în formulă cu aceeași expresie.

2. *Modus ponens.* Despre această metodă de inferență am mai vorbit. Ea se reduce la forma următoare: dacă o implicație între două expresii este adevărată și dacă primul membru al implicației este adevărat, atunci tragem concluzia că și membrul al doilea este adevărat.

Vom indica după metoda lui Russell sub o formulă modul ei de demonstrație, aplicarea regulei *modus ponens* nefiind explicit specificată.

Spre exemplu „$Taut \frac{\sim p}{p}$" înseamnă ce devine propoziția „*Taut*" (principiul tautologiei) cînd se înlocuiește p cu $\sim p$. Pentru a ne lămuri mai bine asupra procedeului, să considerăm un exemplu. Fie propoziția de demonstrat:

$$\vdash : p \supset \sim p \,.\supset.\sim p$$

Această propoziție spune: dacă p implică propria sa falsitate, atunci p este fals.

Procedeul demonstrației va fi indicat pe scurt, dedesubtul acestei propoziții, cu rezultatul ce urmează:

$$\left[Taut \frac{\sim p}{p}\right] \quad \vdash : \sim p \vee \sim p \,.\supset.\sim p \qquad (1)$$

Și încă:

$$(1)\,.(1.01) \quad \vdash : p \supset \sim p \,.\supset.\sim p$$

Adică, dacă substituim în propoziția însemnată „*Taut*", care este:

$$\vdash : p \vee p \,.\supset. p,$$

pe p cu $\sim p$, căpătăm:

$$\sim p \vee \sim p \,.\supset.\sim p \qquad (1)$$

A doua linie a demonstrației este indicată în parantezele (1).(1.01), adică dacă aplicăm lui (1) definiția (1.01), care este a implicației, urmează că suma logică $\sim p \vee \sim p$ poate fi scrisă $p \supset \sim p$, după cum $\sim p \vee p$ este scris $p \supset p$. Ceea ce s-a scris în dreptul acestei paranteze este tocmai propoziția de demonstrat.

Am scris în fața propozițiilor primitive semnul „$\vdash$" de aserțiune, fiindcă le-am luat ca axiome, ca propoziții adevărate. Tot astfel în fața fiecărei consecințe adevărate, în fața fiecărei propoziții deduse punem semnul „$\vdash$" pentru a arăta că este adevărată.

2.01 $\vdash : p \supset \sim p \,.\supset.\sim p$

Dacă o propoziție implică propria sa falsitate, atunci ea este falsă. Principiul *reductio ad absurdum*.

Dem.[17]

$$\left[Taut\ \frac{\sim p}{p}\right] \vdash : \sim p \vee \sim p \,.\supset.\sim p \qquad (1)$$

$$[(1)\,.(1.01)] \vdash : p \supset \sim p \,.\supset.\sim p$$

2.02 $\vdash : q \,.\supset.\, p \supset q$

Dem.

$$\left[Add\ \frac{\sim p}{p}\right] \vdash : q \,.\supset.\sim p \vee q \qquad (1)$$

$$[(1)\,.\,(1.01)] \vdash : q \,.\supset.\, p \supset q$$

O propoziție adevărată q este implicată de oricare propoziție p.

2.03 $\vdash : p \supset \sim q \,.\supset.\, q \supset \sim p$

Dem.

$$\left[Perm\ \frac{\sim p,\ \sim q}{p,\quad q}\right] \vdash : \sim p \vee \sim q \,.\supset.\sim q \vee \sim p \qquad (1)$$

$$[(1).(1.01)] \vdash : p \supset \sim q.\supset.\, q \supset \sim p$$

[17] Însemnăm cu „*Dem*", pe scurt, „demonstrația".

2.04 $\vdash :. p . \supset . q \supset r : \supset : q . \supset . p \supset r$

Dem.

$$\left[Assoc \frac{\sim p,\ \sim q}{p,\quad q}\right] \vdash : \sim p \vee (\sim q \vee r) . \supset . \sim q \vee (\sim p \vee r) \qquad (1)$$

$[(1) . (1.01)] \vdash :. p . \supset . q \supset r : \supset : q . \supset . p \supset r$

Propoziția 2.04 este extrem de importantă. Ea se mai numește și „principiul comutativ" *(„Comm")* și arată că dacă q implică r, presupunînd p adevărat, atunci p implică r dacă q este adevărat.

2.05 $\vdash :. q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r$

Dem.

$$\left[Sum \frac{\sim p}{p}\right] \vdash :. q \supset r . \supset : \sim p \vee q . \supset . \sim p \vee r \qquad (1)$$

$[(1).(1.01)] \vdash :. q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r$

2.06 $\vdash :. p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r$

Dem.

$$\left[Comm \frac{q \supset r,\ p \supset q,\ p \supset r}{p,\quad q,\quad r}\right] \vdash :: q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r :. \supset :: p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r \qquad (1)$$

$[2.05] \vdash :. q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r \qquad (2)$

$[(1), (2)] \vdash :. p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r$

Ultimul rînd din demonstrație se obține prin inferență *(modus ponens)* din premisa (2) pe baza formulei adevărate (1).

Amîndouă propozițiile de mai sus, 2.05 și 2.06, sînt numite „principiul silogismului" (pe scurt „*Syll*"), deoarece silogismul în Barbara derivă din ele.

2.07 $\vdash : p . \supset . p \vee p$

Dem. $\left[1.3 \ \frac{q}{p}\right]$

Demonstrația înseamnă: în propoziția 1.3 se înlocuiește q cu p și se capătă exact rezultatul.

În continuare, demonstrațiile vor fi, de asemenea, prescurtate, indicînd doar principalele teoreme folosite și substituțiile mai importante. Lectorul le va putea astfel reconstitui cu ușurință.

2.08 $\vdash . p \supset p$

Dem.

$\left[2.05 \ \frac{p \vee p, p}{q, r}, \ Taut, \ 2.07\right]$

O propoziție se implică singură. Această teoremă nu este principiul identității. Ea poartă numele de „legea identității" („*Id*").

2.1 $\vdash . \sim p \vee p$

Dem. [*Id* . (1.01)]

2.11 $\vdash . p \vee \sim p$

Dem. [2.1, *Perm*]

Cele două teoreme reprezintă principiul terțiului exclus: orice propoziție este adevărată sau falsă.

2.12 $\vdash . p \supset \sim (\sim p)$

Dem.

$\left[2.11 \ \frac{\sim p}{p}, 1.01\right]$

2.13 $\vdash . p \vee \sim \{\sim (\sim p)\}$

Dem.

$\left[Sum \ \frac{\sim p, \sim \{\sim (\sim p)\}}{q, \quad r}, 2.12 \ \frac{\sim p}{p}, 2.11\right]$

2.14 $\vdash . \sim (\sim p) \supset p$

Dem.

$$\left[Perm \frac{\sim \{\sim (\sim p)\}}{q}, 2.13 , 1.01 \right]$$

Teoremele 2.12 și 2.14 reprezintă cele două forme ale principiului dublei negații.

Demonstrațiile teoremelor care urmează se pot face urmînd aceleași metode ca pînă acum, așa încît, de aici încolo, le vom omite[18].

2.15 $\vdash : \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset p$

2.16 $\vdash : p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim p$

2.17 $\vdash : \sim q \supset \sim p . \supset . p \supset q$

Teoremele 2.03, 2.15, 2.16 și 2.17 sînt forme ale principiului transpoziției. Ele arată că dacă o implicație este adevărată atunci este adevărată și implicația inversă, obținută transportînd termenii unul în locul altuia și schimbîndu-le semnele.

2.18 $\vdash : \sim p \supset p . \supset . p$

Această propoziție este complementară principiului *reductio ad absurdum*. Ea afirmă că o propoziție care urmează din propria ei falsitate este adevărată.

2.2 $\vdash : p . \supset . p \vee q$

2.21 $\vdash : \sim p . \supset . p \supset q$

---

[18] Cititorul poate însă verifica, construind matricea de adevăr a teoremei respective pe baza indicațiilor date în *3.14, că aceasta este o „tautologie", adică oricare ar fi valorile de adevăr ale variabilelor propoziționale valoarea sa este A. Dar s-a arătat că în acest caz ea poate fi demonstrată în sistemul lui Whitehead și Russell.

2.24 $\vdash : p . \supset . \sim p \supset q$

2.25 $\vdash :. p : \vee : p \vee q . \supset . p$

2.26 $\vdash :. \sim p : \vee : p \supset q . \supset . q$

2.27 $\vdash :. p . \supset : p \supset q . \supset . q$

2.3 $\vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . p \vee (r \vee q)$

2.31 $\vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . (p \vee q) \vee r$

2.32 $\vdash : (p \vee q) \vee r . \supset . p \vee (q \vee r)$

Propozițiile 2.3, 2.31, 2.32 exprimă legea asociativității pentru adiția logică a propozițiilor.

2.33 $p \vee q \vee r . = . (p \vee q) \vee r$ *Df.*

Această definiție privește numai parantezele, care, după cum se vede, pot fi desființate sau introduse într-o disjuncție logică, fără a modifica ceva.

2.36 $\vdash :. q \supset r . \supset : p \vee q . \supset . r \vee p$

2.37 $\vdash :. q \supset r . \supset : q \vee p . \supset . p \vee r$

2.38 $\vdash :. q \supset r . \supset : q \vee p . \supset . r \vee p$

Aceste ultime trei teoreme spun că, dacă o implicație este adevărată, atunci ea rămîne adevărată dacă se adună logic la membrii ei o propoziție oarecare p.

2.4 $\vdash :. p . \vee . p \vee q \supset . p \vee q$

2.41 $\vdash :. q . \vee . p \vee q : \supset . p \vee q$

2.42 $\vdash :. \sim p . \vee . p \supset q : \supset . p \supset q$

2.43 $\vdash :. p . \supset . p \supset q : \supset . p \supset q$

2.45 $\vdash : \sim (p \vee q) . \supset . \sim p$

2.46 $\vdash : \sim (p \vee q) . \supset . \sim q$

2.47 $\vdash : \sim (p \vee q) . \supset . \sim p \vee q$

2.48 $\vdash : \sim (p \vee q) . \supset . p \vee \sim q$

2.49 $\vdash : \sim (p \vee q) . \supset . \sim p \vee \sim q$

2.5 $\vdash : \sim (p \supset q) . \supset . \sim p \supset q$

2.51 $\vdash : \sim (p \supset q) . \supset . p \supset \sim q$

2.52 $\vdash : \sim (p \supset q) . \supset . \sim p \supset \sim q$

2.521 $\vdash : \sim (p \supset q) . \supset . q \supset p$

2.53 $\vdash : p \vee q . \supset . \sim p \supset q$

2.54 $\vdash : \sim p \supset q . \supset . p \vee q$

2.55 $\vdash :. \sim p . \supset : p \vee q . \supset . q$

2.56 $\vdash :. \sim q . \supset : p \vee q . \supset . p$

2.6 $\vdash :. \sim p \supset q . \supset : p \supset q . \supset . q$

2.61 $\vdash :. p \supset q . \supset : \sim p \supset q . \supset . q$

2.62 $\vdash :. p \vee q . \supset : p \supset q . \supset . q$

2.621 $\vdash :. p \supset q . \supset : p \vee q . \supset . q$

2.63 $\vdash :. p \vee q . \supset : \sim p \vee q . \supset . q$

2.64 $\vdash :. p \vee q \supset : p \vee \sim q . \supset . p$

2.65 $\vdash :. p \supset q . \supset : p \supset \sim q . \supset . \sim p$

2.67 $\vdash :. p \vee q . \supset . q : \supset . p \supset q$

2.68 $\vdash :. p \supset q . \supset . q : \supset . p \vee q$

2.69 $\vdash :. p \supset q . \supset . q : \supset : q \supset p . \supset . p$

2.73 $\vdash :. p \supset q . \supset : p \vee q \vee r . \supset . q \vee r$

2.74 $\vdash :. q \supset p . \supset : p \vee q \vee r . \supset . p \vee r$

2.75 $\vdash :: p \vee q . \supset :. p . \vee . q \supset r : \supset . p \vee r$

2.76 $\vdash :. p . \vee . q \supset r : \supset : p \vee q . \supset . p \vee r$

2.77 $\vdash :. p . \supset . q \supset r : \supset : p \supset q . \supset . p \supset r$

2.8 $\vdash :. q \vee r . \supset : \sim r \vee s . \supset . q \vee s$

2.31 $\vdash :: q \,.\supset.\, r \supset s : \supset :. p \vee q \,.\supset: p \vee r \,.\supset.\, p \vee s$

2.32 $\vdash :. p \vee q \vee r \,.\supset: p \vee \sim r \vee s \,.\supset.\, p \vee q \vee s$

2.33 $\vdash :: p \,.\supset.\, q \supset r : \supset :. p \,.\supset.\, r \supset s : \supset : p \,.\supset.\, q \supset s$

2.35 $\vdash :. p \vee q \,.\supset. p \vee r : \supset : p \,.\vee.\, q \supset r$

2.36 $\vdash :. p \supset q \,.\supset. p \supset s : \supset : p \,.\supset.\, q \supset s$

* 3.6. Produsul logic a două propoziții

Am văzut că produsul logic a două propoziții p și q — conjuncția logică — înseamnă că „p și q sînt amîndouă adevărate". Russell nu ia această legătură dintre propoziții ca propoziție primitivă, ci o definește cu ajutorul disjuncției logice:

3.01 $p \,.q\,. = .\sim (\sim p \vee \sim q)$ *Df.*

Principalele teoreme ale acestui paragraf sînt următoarele:

3.1 $\vdash :\ p \,.q\,.\supset.\sim (\sim p \vee \sim q)$

3.11 $\vdash :\ \sim (\sim p \vee \sim q) \,.\supset. p \,.q$

3.12 $\vdash :\ \sim p \,.\vee.\sim q \,.\vee. p \,.q$

3.13 $\vdash :\ \sim (p \,.q) \,.\supset.\sim p \vee \sim q$

3.14 $\vdash :\ \sim p \vee \sim q \,.\supset.\sim (p \,.q)$

3.2 $\vdash :. p \,.\supset: q \,.\supset. p \,.q$

3.21 $\vdash :. q \,.\supset: p \,.\supset. p \,.q$

3.22 $\vdash :\ p \,.q\,.\supset. q \,.p$

Propoziția aceasta exprimă legea comutativității pentru produsul logic.

3.24 $\vdash .\sim (p \,.\sim p)$

Propoziția aceasta exprimă principiul contradicției: este fals că o propoziție este adevărată și în același timp falsă.

3.26 $\vdash : p \,.\, q \,.\supset.\, p$

3.27 $\vdash : p \,.\, q \,.\supset.\, q$

Teoremele 3.26 și 3.27 se numesc „principiul de simplificare", la fel cu 2.02, din care au fost deduse.

3.3 $\vdash :. p \,.\, q \,.\supset. r : \supset : p \,.\supset. q \supset r$

Această teoremă spune: dacă p și q implică împreună r, atunci p implică „q implică r". Peano a numit acest principiu „exportare", deoarece q este scos (exportat) din produsul $p \,.\, q$.

3.31 $\vdash :. p \,.\supset. q \supset r : \supset : p \,.\, q \,.\supset. r$

Teorema aceasta e corelativa precedentei; Peano o numește „importare".

3.33 $\vdash : p \supset q \,.\, q \supset r \,.\supset.\, p \supset r$
3.34 $\vdash : q \supset r \,.\, p \supset q \,.\supset. p \supset r$

Teoremele 3.33 și 3.34 sînt expresii ale silogismului.

3.35 $\vdash : p \,.\, p \supset q \,.\supset.\, q$

Dacă p este adevărat și în același timp p implică q, atunci q este adevărat. Acest principiu va fi numit al aserțiunii. El este diferit de inferență (1.1), deoarece aici „p este adevărat" este ipotetic („dacă"), pe cînd în inferență p este adevărat de fapt.

3.37 $\vdash :. p \,.\, q \,.\supset. r : \supset : p \,.\sim r \,.\supset.\sim q$

Teorema este o altă formă a principiului transpoziției.

3.4 $\vdash : p \,.\, q \,.\supset.\, p \supset q$

3.41 $\vdash :. p \supset r \,.\supset : p \,.\, q \,.\supset. r$

3.42 $\vdash :. q \supset r \,.\supset : p \,.\, q \,.\supset. r$

3.43 $\vdash :. p \supset q \,.\, p \supset r \,.\supset : p \,.\supset. q \,.\, r$

Dacă o propoziție implică fiecare din alte două propoziții, ea implică produsul lor logic. Peano a numit acest principiu al „compoziției".

3.44 $\vdash :. q \supset p \,.\, r \supset p \,.\supset : q \vee r \,.\supset .\, p$

Teorema aceasta e analogă cu 3.43.

3.45 $\vdash :. p \supset q \,.\supset : p \,.\, r \,.\supset .\, q \,.\, r$

Principiul acesta arată că se pot „multiplica" logic ambii membri ai unei implicații și căpătăm tot o implicație adevărată dacă prima este adevărată.

Tot astfel se putea — cum am văzut într-o teoremă precedentă (1.6) — să se adune logic o propoziție la cei doi membri ai unei implicații.

Principiul este numit de Peano „al factorului".

3.47 $\vdash :. p \supset r \,.\, q \supset s \,.\supset : p \,.\, q \,.\supset .\, r \,.\, s$

Dacă p implică r și q implică s, atunci p și q împreună implică r și s împreună.

Această propoziție fusese demonstrată încă de Leibniz (pentru clase, nu pentru propoziții), care o numise *„praeclarum theorema"*.

3.48 $\vdash :. p \supset r \,.\, q \supset s \,.\supset : p \vee q \,.\supset .\, r \vee s$

Teorema aceasta este analogă cu 3.47, unde se întrebuințează sume în loc de produs.

* 3.7. Echivalența

Am întîlnit echivalența cînd am vorbit de funcții de adevăr. Am văzut că două propoziții sînt echivalente cînd au aceeași valoare de adevăr. Simbolic:

$$p \equiv q$$

Acest lucru, după cum este evident, nu se întîmplă decît dacă amîndouă propozițiile sînt simultan adevărate sau simultan false. De aici rezultă că dacă prima este ade-

vărată, a doua este adevărată și dacă a doua este adevărată, prima este adevărată; cu alte cuvinte p implică q și simultan q implică p. Ceea ce l-a condus pe Russell să definească echivalența prin două implicații simultane[19].

4.01 $p \equiv q \cdot = \cdot p \supset q \cdot q \supset p$ *Df.*

De aici mai urmează că în cazul cînd două propoziții sînt echivalente se poate substitui una cu cealaltă fără a altera valoarea de adevăr a formulei în care se face substituția.

Teoremele următoare sînt de reținut:

4.1 $\vdash : p \supset q \cdot \equiv \cdot \sim q \supset \sim p$

4.11 $\vdash : p \equiv q \cdot \equiv \cdot \sim p \equiv \sim q$

Aceste două teoreme sînt forme ale principiului transpoziției.

4.12 $\vdash : p \equiv \sim q \cdot \equiv \cdot q \equiv \sim p$

4.13 $\vdash \cdot p \equiv \sim (\sim p)$

Teorema 4.13 e legea dublei negații: o propoziție este echivalentă cu negația negației ei.

4.14 $\vdash :. p \cdot q \cdot \supset \cdot r : \equiv : p \cdot \sim r \cdot \supset \cdot \sim q$

4.15 $\vdash :. p \cdot q \cdot \supset \cdot \sim r : \equiv : q \cdot r \cdot \supset \cdot \sim p$

4.2 $\vdash \cdot p \equiv p$

4.21 $\vdash : p \equiv q \cdot \equiv \cdot q \equiv p$

4.22 $\vdash : p \equiv q \cdot q \equiv r \cdot \supset \cdot p \equiv r$

4.24 $\vdash : p \cdot \equiv \cdot p \cdot p$

4.25 $\vdash : p \cdot \equiv \cdot p \vee p$

Ultimele două teoreme exprimă „legea tautologiei" : p este echivalent cu „p sau p" sau cu „p și p". În această

[19] *Principia Mathematica*, vol. I, p. 120.

diferență stă deosebirea fundamentală între algebra logicii simbolice și algebra obișnuită.

4.3 $\vdash : p \,.\, q \,.\equiv.\, q \,.\, p$

4.31 $\vdash : p \vee q \,.\equiv.\, q \vee p$

Aici, în 4.3 și 4.31, avem exprimată complet legea comutativității pentru produsul și suma logică, pe cînd în 3.22 și 1.4 această lege era exprimată incomplet (printr-o singură implicație).

4.32 $\vdash : (p \,.\, q) \,.\, r \,.\equiv.\, p \,.\, (q \,.\, r)$

4.33 $\vdash : (p \vee q) \vee r \,.\equiv.\, p \vee (q \vee r)$

Propozițiile 4.32 și 4.33 exprimă complet legea asociativității produsului și respectiv a sumei logice.

4.34 $p \,.\, q \,.\, r \,.=.\, (p \,.\, q) \,.\, r$ *Df*

Aceasta din urmă este o definiție folosită la eliminarea parantezelor.

4.36 $\vdash :. p \equiv q \,.\supset : p \,.\, r \,.\equiv.\, q \,.\, r$

4.37 $\vdash :. p \equiv q \,.\supset : p \vee r \,.\equiv.\, q \vee r$

4.38 $\vdash :. p \equiv r \,.\, q \equiv s \,.\supset : p \,.\, q \,.\equiv.\, r \,.\, s$

4.39 $\vdash :. p \equiv r \,.\, q \equiv s \,.\supset : p \vee q \,.\equiv.\, r \vee s$

4.4 $\vdash :. p \,.\, q \vee r \,.\equiv : p \,.\, q \,.\vee.\, p \,.\, r$

Propoziția aceasta (ultimă) exprimă prima formă a legii distributivității. Ea seamănă cu operația algebrică:

$p\,(q + r) = p \,.\, q + p \,.\, r.$

4.41 $\vdash :. p \,.\vee.\, q \,.\, r : \equiv \,.\, p \vee q \,.\, p \vee r$

Aceasta este a doua formă a legii distributivității, în raport cu semnul „$\vee$". Nu are corespondent algebric.

4.42 $\vdash :. p . \equiv : p . q . \vee . p . \sim q$

4.43 $\vdash :. p . \equiv : p \vee q . p \vee \sim q$

4.44 $\vdash :. p . \equiv : p . \vee . p . q$

4.45 $\vdash : p . \equiv . p . p \vee q$

Următoarele formule sînt corespunzătoare unor legi găsite de De Morgan.

4.5 $\vdash : p . q . \equiv . \sim (\sim p \vee \sim q)$

4.51 $\vdash : \sim (p . q) . \equiv . \sim p \vee \sim q$

4.52 $\vdash : p . \sim q . \equiv . \sim (\sim p \vee q)$

4.53 $\vdash : \sim (p . \sim q) . \equiv . \sim p \vee q$

4.54 $\vdash : \sim p . q . \equiv . \sim (p \vee \sim q)$

4.55 $\vdash : \sim (\sim p . q) . \equiv . p \vee \sim q$

4.56 $\vdash : \sim p . \sim q . \equiv . \sim (p \vee q)$

4.57 $\vdash : \sim (\sim p . \sim q) . \equiv . p \vee q$

Formulele care urmează se obțin din cele de mai sus imediat. Ele arată cum se pot transforma implicațiile în sume sau în negații de produse logice.

4.6 $\vdash : p \supset q . \equiv . \sim p \vee q$

4.61 $\vdash : \sim (p \supset q) . \equiv . p . \sim q$

4.62 $\vdash : p \supset \sim q . \equiv . \sim p \vee \sim q$

4.63 $\vdash : \sim (p \supset \sim q) . \equiv . p . q$

4.64 $\vdash : \sim p \supset q . \equiv . p \vee q$

4.65 $\vdash : \sim (\sim p \supset q) . \equiv . \sim p . \sim q$

4.66 $\vdash : \sim p \supset \sim q . \equiv . p \vee \sim q$

4.67 $\vdash : \sim (\sim p \supset \sim q) . \equiv . \sim p . q$

4.7 $\vdash :. p \supset q . \equiv : p . \supset . p . q$

4.71 $\vdash :. p \supset q . \equiv : p . \equiv . p . q$

Această ultimă propoziție este foarte întrebuințată. Ea ne îngăduie să transformăm oricare implicație logică într-o echivalență, ceea ce — scrie Russell — are avantajul de a asimila, pe cît se poate, logica simbolică cu algebra[20].

4.72 $\vdash :. p \supset q . \equiv : q . \equiv . p \vee q$

4.73 $\vdash :. q . \supset : p . \equiv . p . q$

Această teoremă este deosebit de importantă deoarece arată că un factor adevărat poate fi omis dintr-un produs fără a altera valoarea de adevăr a produsului.

4.74 $\vdash :. \sim p . \supset : q . \equiv . p \vee q$

4.76 $\vdash :. p \supset q . p \supset r . \equiv : p . \supset . q . r$

4.77 $\vdash :. q \supset p . r \supset p . \equiv : q \vee r . \supset . p$

4.78 $\vdash :. p \supset q . \vee . p \supset r : \equiv : p . \supset . q \vee r$

4.79 $\vdash :. q \supset p . \vee . r \supset p : \equiv : q . r . \supset . p$

4.8 $\vdash : p \supset \sim p . \equiv . \sim p$

4.81 $\vdash : \sim p \supset p . \equiv . p$

4.82 $\vdash : p \supset q . p \supset \sim q . \equiv . \sim p$

4.83 $\vdash : p \supset q . \sim p \supset q . \equiv . q$

4.84 $\vdash :. p \equiv q . \supset : p \supset r . \equiv . q \supset r$

4.85 $\vdash :. p \equiv q . \supset : r \supset p . \equiv . r \supset q$

---

[20] *Principia Mathematica*, vol. I, p. 126.

4.86 $\vdash :. p \equiv q . \supset : p \equiv r . \equiv . q \equiv r$

4.87 $\vdash :. p . q . \supset . r : \equiv : p . \supset . q \supset r : \equiv$
$: q . \supset . p \supset r : \equiv : q . p . \supset . r$

Acest ultim principiu include principiile de exportare, importare și legea comutativității.

* 3.8. Propoziții diverse

5.1 $\vdash : p . q . \supset . p \equiv q$

5.11 $\vdash : p \supset q . \vee . \sim p \supset q$

5.12 $\vdash : p \supset q . \vee . p \supset \sim q$

5.13 $\vdash : p \supset q . \vee . q \supset p$

5.14 $\vdash : p \supset q . \vee . q \supset r$

5.15 $\vdash : p \equiv q . \vee . p \equiv \sim q$

5.16 $\vdash . \sim (p \equiv q . p \equiv \sim q)$

Nu este adevărat că p este echivalent cu q și în același timp p este echivalent cu $\sim q$.

5.17 $\vdash : p \vee q . \sim (p . q) . \equiv . p \equiv \sim q$

5.18 $\vdash : p \equiv q . \equiv . \sim (p \equiv \sim q)$

5.19 $\vdash . \sim (p \equiv \sim p)$

5.21 $\vdash : \sim p . \sim q . \supset . p \equiv q$

5.22 $\vdash :. \sim (p \equiv q) . \equiv : p . \sim q . \vee . q . \sim p$

5.23 $\vdash :. p \equiv q . \equiv : p . q . \vee . \sim p . \sim q$

5.24 $\vdash :. \sim (p . q . \vee . \sim p . \sim q) . \equiv : p . \sim q . \vee . q . \sim p$

5.25 $\vdash :. p \vee q . \equiv : p \supset q . \supset . q$

Propoziția aceasta arată că am fi putut lua implicația ca o idee primitivă deoarece disjuncția poate fi exprimată cu ajutorul ei.

Russell nu a procedat așa, fiindcă în cazul acesta ar fi avut nevoie de mai multe propoziții primitive.

5.3 $\vdash :. p . q . \supset . r : \equiv : p . q . \supset . p . r$

5.31 $\vdash :. r . p \supset q : \supset : p . \supset . q . r$

5.32 $\vdash :. p . \supset . q \equiv r : \equiv : p . q . \equiv . p . r$

5.33 $\vdash :. p . q \supset r . \equiv : p : p . q . \supset . r$

5.35 $\vdash :. p \supset q . p \supset r . \supset : p . \supset . q \equiv r$

5.36 $\vdash : p . p \equiv q . \equiv . q . p \equiv q$

5.4 $\vdash :. p . \supset . p \supset q : \equiv . p \supset q$

5.41 $\vdash :. p \supset q . \supset . p \supset r : \equiv : p . \supset . q \supset r$

5.42 $\vdash :: p . \supset . q \supset r : \equiv :. p . \supset : q . \supset . p . r$

5.44 $\vdash :: p \supset q . \supset :. p \supset r . \equiv : p . \supset . q . r$

5.5 $\vdash :. p . \supset : p \supset q . \equiv . q$

5.501 $\vdash :. p . \supset : q . \equiv . p \equiv q$

5.53 $\vdash :. p \vee q \vee r . \supset . s : \equiv : p \supset s . q \supset s . r \supset s$

5.54 $\vdash :. p . q . \equiv . p : \vee : p . q . \equiv . q$

5.55 $\vdash :. p \vee q . \equiv . p : \vee : p \vee q . \equiv . q$

5.6 $\vdash :. p . \sim q . \supset . r : \equiv : p . \supset . q \vee r$

5.61 $\vdash : p \vee q . \sim q . \equiv . p . \sim q$

5.62 $\vdash :. p . q . \vee . \sim q : \equiv . p \vee \sim q$

5.63 $\vdash :. p \vee q . \equiv : p . \vee . \sim p . q$

5.7 $\vdash :. p \vee r . \equiv . q \vee r : \equiv : r . \vee . p \equiv q$

5.71 $\vdash :. q \supset \sim r . \supset : p \vee q . r . \equiv . p . r$

5.74 $\vdash :. p . \supset . q \equiv r : \equiv : p \supset q . \equiv . p \supset r$

5.75 $\vdash :. r \supset \sim q : p . \equiv . q \vee r : \supset : p . \sim q . \equiv . r$

B. Calculul cu funcţii

* 3.9. Funcţii propoziţionale

În capitolul precedent am tratat propoziţiile ca pe niște întregi, fără a ne interesa dacă au sau nu o structură interioară și care poate fi ea. Vom considera acum, și această structură în calculul care poartă numele, în *Principia Mathematica*, de „calculul funcţiilor propoziţionale". Numele acestei părţi a logicii derivă din conceptul fundamental de *funcţie propoziţională*, pe care îl vom explicita în cele ce urmează[21].

Fie, spre exemplu, propoziţia „Socrate este muritor". În calculul propoziţional am fi simbolizat-o prin litera p, deoarece este o propoziţie simplă (nu include mai multe propoziţii). Ceea ce nu spune nimic cu privire la alcătuirea sa. Ea este alcătuită dintr-un subiect și un predicat sau, mai general, dintr-un individ, „Socrate", și o proprietate, „muritor", și afirmă că individul are această proprietate.

Dar și „Platon este muritor", și „Aristotel este muritor" etc.; propoziţii cu aceeași formă, doar individul diferă. Dacă îl notăm în general cu x, forma comună a tuturor acestora va fi

„x este muritor"

Cum x este considerat aici ca un individ variabil, expresia nu mai reprezintă o propoziţie, ci doar un simplu crochiu, ... un vas destinat a primi o semnificaţie[22]. Russell o numește funcţie propoziţională, iar pe x — argumentul funcţiei propoziţionale[23].

---

[21] În lucrarea lor, *Grundlagen der Mathematik*, vol. I (1934), **Hilbert și Bernays** l-au numit calcul cu predicate, utilizînd pentru ceea ce numim aici funcţie propoziţională denumirea de *predicat*.

[22] **B. Russell,** *Introduction to mathematical philosophy*, trad. franceză, p. 188.

[23] Iată ce scriu autorii *Principiilor*: „Printr-o funcţie propoziţională înţelegem ceva care conţine o variabilă x și exprimă o propoziţie de îndată ce lui x i se atribuie o valoare" (p. 41).

Împrumutînd simbolismul matematic și notînd cu f proprietatea („muritor"), expresia va putea fi reprezentată prin

$$f(x)$$

și se va citi „x are proprietatea f" sau pur și simplu „x este f". Cîteodată privim și proprietatea ca pe ceva variabil, putînd lua diverse valori: muritor, rațional etc. Atunci utilizăm pentru notarea ei literele alfabetului grecesc φ, ψ, χ,...

$\varphi(x)$ va reprezenta tot „x are proprietatea φ", însă nici x și nici φ nu sînt determinate.

O propoziție poate fi adevărată sau falsă. O funcție propozițională poate deveni o propoziție — și prin aceasta adevărată sau falsă — cînd argumentul x și proprietatea φ capătă valori determinate.

Vom nota, pentru a face distincție, valorile determinate pe care le poate lua argumentul prin

$$a, b, c...$$

iar cele pe care le poate lua φ prin

$$f, g, h...$$

Spre deosebire de acestea,

$$x, y, z...$$

vor reprezenta indivizi variabili, iar

$$\varphi, \psi, \chi...$$

proprietăți variabile.

Într-o funcție propozițională determinată $f(x)$ — spre exemplu „x este muritor" —, argumentul poate lua valori pentru care aceasta devine o propoziție adevărată (de exemplu x = Aristotel), valori pentru care ea devine o propoziție falsă (de exemplu x = Prometeu), dar în nici un caz valori pentru care căpătăm o simplă înșiruire de cuvinte fără sens; de pildă „numărul șapte este muritor" (pentru x = numărul șapte). Adică trebuie să ne limităm

la acele valori ale argumentului care o fac să devină o propoziție cu sens. Acestea formează „domeniul" funcției propoziționale[24].

Un alt mod de a transforma o funcție propozițională dată „$f(x)$" într-o propoziție (care poate fi adevărată sau falsă) este *cuantificarea*, și anume cuantificarea *universală* sau *generală* și cuantificarea *particulară* sau *existențială*.

Prima se aplică cînd vrem să exprimăm faptul că funcția devine o propoziție adevărată pentru fiecare din indivizii domeniului său, să zicem:

$$a, b, c...$$

Pentru aceasta vom scrie:

$$(x) \cdot f(x),$$

ceea ce înseamnă „$f(x)$ pentru toți x" sau „$f(x)$ întotdeauna". Adică $f(a), f(b), f(c)...$ sînt toate adevărate. Cînd sînt în număr finit, aceasta echivalează cu

$$f(a) \cdot f(b) \cdot f(c)...$$

așa cum rezultă din modul în care am definit conjuncția logică.

Semnul (x) pus în fața funcției ca să indice această transformare se numește *cuantificatorul universal*.

Cînd cel puțin una din propozițiile $f(a), f(b), f(c)...$ este adevărată, adică pentru cazul finit cînd

$$f(a) \vee f(b) \vee f(c) \vee ...$$

vom scrie:

$$(\exists x) \cdot f(x),$$

ceea ce înseamnă evident că „există cel puțin un x pentru care $f(x)$" sau „$f(x)$ uneori".

[24] Frege asimilează funcția propozițională $f(x)$, unde x poate lua numai valori din domeniu, cu *conceptul*. Mulțimea indivizilor $a, b, c...$ astfel încît $f(a), f(b), f(c)...$ să fie toate propoziții adevărate formează *extensiunea* conceptului *(Grundgesetze der Arithmetik*, vol. I, Jena, 1893, § 3).

Cuantificatorul $(\exists x)$ se numește *existențial* sau *particular*[25].

Astfel $(x) \,.\, f(x)$ și $(\exists x) \,.\, f(x)$ nu mai reprezintă niște funcții propoziționale, ci niște propoziții. Prin urmare, deși notat ca o variabilă, x nu mai reprezintă așa ceva. Același lucru se petrece în matematică, unde integrala definită

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

este un număr și nu o funcție de x. De aceea, în asemenea cazuri, x se mai numește variabilă *aparentă* sau *legată*. Într-o funcție propozițională, $f(x)$, intervine însă o variabilă *reală* sau *liberă*.

* 3.10. Idei primitive

După cum am văzut, calculul cu funcții se constituie prin analiza mai adîncită a structurii propozițiilor, astfel încît el nu exclude analiza făcută de calculul propozițional, ci, dimpotrivă, și-o încorporează în mod natural.

În consecință, ideile primitive de la care pleacă primul (*3.2) sînt aici îmbogățite. Le vom urmări din nou pe toate pentru a avea în față un tablou complet al lor.

1. *Propoziții elementare*. Ele apar de fapt în calcul sub forma unor variabile ce pot lua drept valori propoziții elementare. Aceste variabile sînt fie ca în calculul pro-

---

[25] În logică — după cantitatea sub care este luat subiectul — propozițiile se împart în trei categorii:

1. *singulare*: în care subiectul este format dintr-un individ singular (de ex. „Aristotel este muritor");

2. *universale*: în care subiectul este format din *toți* indivizii unei anumite clase (de ex. „toți oamenii sînt muritori");

3. *particulare*: în care subiectul este format dintr-o *parte* a indivizilor unei anumite clase (de ex. „unii oameni sînt muritori").

Analogia dintre acestea și tipurile de propoziții ce se pot obține dintr-o funcție propozițională dată este transparentă.

poziţional, p, q, r etc., fie φx, ψx, χx, etc.[26], care, după cum am văzut în *3.9, reprezintă funcţii propoziţionale variabile şi iau drept valori tot propoziţii.

Vom numi, după exemplul autorilor mai noi, orice expresie cu care operează calculul nostru, *formulă*. În acest sens toate propoziţiile elementare sînt formule.

2. *Negaţia* oricărei formule, notată ca şi în calculul propoziţional prin punerea în faţă a semnului $\sim$, este tot o formulă. Am explicat deja, în calculul propoziţional, care este semnificaţia ei.

3. *Disjuncţia* a două formule (notată $\vee$) este, de asemenea, formulă.

4. *Cuantificarea*. În sfîrşit, dacă într-o formulă apare o variabilă de indivizi, spre exemplu x, reală sau liberă (vedeţi *3.9) — formula putînd fi scrisă atunci sub forma $A(x)$ —, înseamnă că ea este o funcţie propoziţională avînd drept argument pe x. Aşa, de pildă, $p \vee \varphi x$. În acest caz variabila respectivă poate fi cuantificată într-unul din cele două moduri. Adică tot formule vor fi considerate

$$(x)\ A(x) \text{ şi } (\exists x)\ A(x).$$

Înţelesul lor este, potrivit cu înţelesul celor doi cuantificatori, „pentru toţi x, $A(x)$", şi respectiv „există unii x pentru care $A(x)$"[27].

Observaţie. Aplicînd de două ori operaţia de cuantificare, se poate ivi următoarea situaţie: formula $A(x)$ să conţină deja un cuantificator pentru variabila x, ca în cazul

$$(x) \cdot \psi x \cdot \vee \cdot \varphi x \qquad (1)$$

Dacă am cuantifica acum variabila liberă x din membrul doi al disjuncţiei, spre exemplu cu cuantificatorul particular $(\exists x)$

$$(\exists x) : (x) \cdot \psi x \cdot \vee \cdot \varphi x,$$

---

[26] Pentru simplificare vom elimina parantezele din scrierea funcţiilor propoziţionale în loc de $\varphi(x)$ punînd φx.

[27] Formula $A(x)$ se numeşte în acest caz *domeniul (de acţiune)* al cuantificatorului (x), respectiv $(\exists x)$.

nu am ști la care din cei doi x se referă acest cuantificator. Evităm această confuzie posibilă schimbînd cu y notația variabilei x legate sau a celei libere din (1). Atunci formula obținută în final va fi:

$$(\exists\ x) : (y) \ .\ \psi y \ .\vee .\ \varphi x$$

și nici o confuzie nu mai este posibilă. Se presupune de obicei că toate formulele sînt construite în felul acesta.

Cu ajutorul ideilor primitive de mai sus, exact ca în calculul propozițional, se pot defini conjuncția, implicația și echivalența[28].

Adică

— conjuncția:	$p \ .\ q \ .\ =\ .\ \sim (\sim p \vee \sim q)$	*Df.*
— implicația:	$p \supset q \ .\ =\ .\ \sim p \vee q$	*Df.*
— echivalența:	$p \equiv q \ .\ =\ .\ p \supset q \ .\ q \supset p$	*Df.*

Vom nota exact ca în calculul propozițional despărțirea părților unei formule prin puncte și vom utiliza semnul de asertiune „$\vdash$" pentru propozițiile al căror adevăr este postulat (propozițiile primitive sau axiomele) sau al căror adevăr a fost demonstrat (teoremele).

* 3.11. Propoziții primitive

Ca și calculul propozițional, cel cu funcții pleacă de la o serie de propoziții primitive. Pe baza lor se demonstrează apoi teoremele calculului.

Mai întîi se includ printre acestea toate propozițiile primitive ale calculului propozițional. Prin urmare teoremele ce se puteau demonstra acolo se pot demonstra și

---

[28] Cu privire la definiție, în general, se pot face aici niște observații foarte interesante. Astfel, deși considerată tot ca un simbol abreviativ, ea trebuie să îndeplinească anumite condiții, de exemplu: variabilele libere utilizate în *definiendum* trebuie să apară în *definiens* (vedeți **H. Reichenbach,** *Elements of Symbolic Logic*, New York, 1948, pp. 120—124).

aici. Dar, așa cum vom vedea, acest lucru se va folosi drept ajutor, scopul fiind îndreptat spre demonstrarea unor formule mai complicate.

In plus, calculul cu funcții pornește de la următoarele propoziții primitive, pe care le vom numerota în continuarea celor din calculul propozițional:

1.8 $\vdash : (x) . \varphi x . \supset . \varphi y$

Aceasta afirmă că dacă proprietatea φ are loc întotdeauna atunci are loc și pentru fiecare individ y în parte.

1.9 $\vdash : \varphi y . \supset . (\exists x) . \varphi x$

Adică proprietatea φ care este valabilă pentru fiecare y în parte este valabilă și pentru unii dintre ei.

1.10. Dacă A și $B(x)$ sînt două formule, astfel încît variabila de indivizi liberă x să nu apară în A și dacă $A \supset B(x)$ este o propoziție adevărată, atunci și $A \supset (x) B(x)$ este o propoziție adevărată.

Evident, aceasta are loc indiferent de notația variabilei din $B : x$, y etc. Spre exemplu, deoarece

$$(x) . \varphi x . \supset . \varphi y$$

este o propoziție adevărată (1.8) și A, adică $(x) . \varphi x$, nu conține variabila de indivizi y, atunci

$$(x) . \varphi x . \supset . (y) . \varphi y$$

este o propoziție adevărată, ceea ce, de altfel, este evident.

1.11. Dacă A și $B(x)$ sînt două formule astfel încît variabila liberă x să nu apară în A și dacă $B(x) \supset A$ este o propoziție adevărată, atunci $(\exists x) B(x) \supset A$ este și ea o propoziție adevărată.

Spre exemplu, din 1.9

$$\varphi y . \supset . (\exists x) . \varphi x$$

se poate deduce

$$(\exists y) . \varphi y . \supset . (\exists x) . \varphi x^{29}.$$

[29] **J. Łukasiewicz** numește cele două reguli, 1.10 și 1.11, regulile de introducere a cuantificatorilor.

* 3.12. Consecințele propozițiilor primitive

Ca și în calculul propozițional, formulele adevărate ale calculului cu funcții se deduc utilizînd propozițiile sale primitive și regulile de *substituție* și *modus ponens*.

Substituția era regula prin care dintr-o formulă adevărată se obținea altă formulă adevărată, înlocuind în prima o variabilă, peste tot unde apărea, printr-o formulă. Dar cum aici, spre deosebire de calculul propozițional, apar mai multe feluri de variabile, vom avea mai multe reguli de substituții; pentru fiecare tip cîte una.

1. Pentru *variabilele legate*, care, după cum am arătat, nu sînt propriu-zis niște variabile, avem doar posibilitatea de a le schimba notația: din x în y etc. Vom avea însă grijă în asemenea cazuri să nu utilizăm același simbol cu al unei variabile libere ce apare în formula respectivă sau cu al unei variabile de asemenea legate, dar care apare în domeniul de acțiune al cuantificatorului respectiv (vezi observația din *3.10).

Spre exemplu expresia:

$$(x) \,.\, \varphi x \,.\vee.\, \varphi y$$

„φ are loc întotdeauna sau are loc pentru un y oarecare" este echivalentă (și se va putea demonstra aceasta) cu

$$(x) \,.\, \varphi x \vee \varphi y]$$

„pentru toți x sau φx are loc sau φ are loc pentru un y oarecare". Într-adevăr, ambele exprimă proprietatea unei funcții propoziționale φ de a fi pentru toți sau măcar pentru unii indivizi adevărată (de a nu fi întotdeauna falsă, adică contradictorie).

Dacă am schimba însă notația variabilei legate x în y, prima formulă

$$(y) \,.\, \varphi y \,.\vee.\, \varphi y$$

va exprima evident aceeași proprietate (ea se citește la fel). Pe cînd a doua

$$(y) \,.\, \varphi y \vee \varphi y,$$

ținînd seama că $\varphi y \vee \varphi y$ este același lucru cu φy, conform teoremei 4.25 din calculul propozițional, se mai poate scrie ca:

$$(y) \cdot \varphi y$$

și reprezintă altă proprietate a unei funcții propoziționale φ (de a fi întotdeauna adevărată, de a nu fi niciodată falsă).

Prin urmare, astfel scrise, formulele nu mai sînt echivalente. Aceasta se datorește confuziei produse prin utilizarea aceluiași simbol pentru două variabile distincte: y din primul și din al doilea termen al disjuncției $\varphi y \vee \varphi y$ (unul fiind variabilă legată, celălalt variabilă liberă). Confuzia a dus la înlocuirea nelegitimă a acestei formule cu φy.

2. *Variabilele libere* am văzut că pot fi în general înlocuite cu indivizi concreți. Intrucît în calculul de care ne ocupăm nu vom lua în considerare asemenea indivizi, rămîne și pentru ele doar posibilitatea de a le schimba notația, cu aceleași rezerve ca în cazul precedent.

3. *Variabilele propoziționale* p, q, r etc. pot fi înlocuite prin formule ale calculului cu predicate, avînd grijă însă ca eventualele variabile libere sau legate ce apar în aceste formule să nu fie notate la fel cu vreuna din variabilele legate ale expresiei în care facem substituția.

De pildă, în

$$(x) \cdot \varphi x \vee p$$

nu avem dreptul să înlocuim variabila propozițională p cu ψx sau cu $(x) \cdot \psi x$, dar o putem înlocui cu ψy sau cu $(y) \cdot \psi y$. Motivul este lesne de înțeles.

4. *Funcțiile propoziționale* elementare de forma φx, ψy etc. pot fi substituite prin formule ale calculului cu predicate ce conțin variabila liberă x, respectiv y etc.

Iată un exemplu de ce înseamnă o asemenea substituție. În expresia $(x) : (\exists y) \cdot \varphi x \vee \sim \varphi y$ se cere să se substituie funcția propozițională φx cu formula $(z) \cdot \psi z \vee \psi x$. Cum această funcție apare în expresia dată în două locuri — sub forma φx și sub forma φy —, va trebui să o înlo-

cuim în fiecare din ele. Substituția ne mai cere însă ca argumentul formulei pe care o introducem să corespundă, de fiecare dată, cu argumentul lui φ. Deci, prima apariție a lui φ o vom înlocui cu: $(z) \,.\, \psi z \vee \psi x$, iar a doua cu $(z) \,.\, \psi z \vee \psi y$. Rezultă

$$(x) :. (\exists\, y) : (z) \,.\, \psi z \vee \psi x \,.\vee.\, \sim (z) \,.\, \psi z \vee \psi y$$

Ca și în cazurile anterioare, trebuie să ne păzim de confuziile ce se pot ivi. Dacă, spre exemplu, formula de înlocuit o scriam sub forma $(y) \,.\, \psi y \vee \psi x$, modificarea necesară de argument ar fi transformat-o în $(y) \,.\, \psi y \vee \psi y$ și confuzia inevitabilă dintre primul y (legat) și al doilea y (liber) ne-ar fi dus, ca într-un exemplu precedent, la identificarea ei nejustificată cu $(y) \,.\, \psi y$.

Pe lîngă substituții, în demonstrații vom mai utiliza și regula *modus ponens*: dacă A și $A \supset B$ sînt formule adevărate ale calculului cu funcții, B este, de asemenea, o formulă adevărată.

Să trecem acum la demonstrarea a cîtorva asemenea propoziții adevărate[30].

T1 $\quad \vdash : (x) \,.\, \varphi x \,.\supset.\, (\exists\, x) \,.\, \varphi x$

„Dacă φ are loc întotdeauna, atunci are loc și uneori".

Demonstrație. Prin substituție în teorema 2.05 (*Syll*) a calculului propozițional obținem:

$$\left[Syll \;\frac{(x).\ \varphi x,\ \varphi y,\ (\exists x).\ \varphi x}{p,\quad q,\quad r} \right] \vdash :: (x).\, \varphi x.\supset.\, \varphi y :\supset$$
$$:.\, \varphi y \,.\supset.\, (\exists\, x)\, \varphi x \,.\, :\supset : (x) \,.\, \varphi x \,.\supset.\, (\exists\, x) \,.\, \varphi x.$$

Din această formulă, prin regula *modus ponens*, utilizînd pe rînd axiomele 1.8 și 1.9, găsim teorema T1.

T2 $\quad \vdash : \sim (x) \,.\, \varphi x \,.\equiv.\, (\exists\, x) \,.\, \sim \varphi x$[31]

Pentru demonstrație o vom împărți în cele două implicații, din care, după definiția 4.01, se compune orice echivalență.

---

[30] Ordinea, numerotarea și demonstrația lor va fi cea din **Hilbert** și **Bernays**, *Grundlagen der Mathematik*, I, ed. a II-a, 1968, § 4.

[31] $\sim (x) \,.\, \varphi x$ reprezintă negația formulei $(x) \,.\, \varphi x$; adică $\sim [(x) \,.\, \varphi x]$, din care, pentru simplificare, s-au omis parantezele.

T2a $\vdash : \sim (x) \,.\, \varphi x \,.\, \supset \,.\, (\exists x) \,.\, \sim \varphi x$

„Dacă este fals că φ are loc întotdeauna, atunci există unii indivizi pentru care φ nu are loc".

T2b $\vdash : (\exists x) \,.\, \sim \varphi x \,.\, \supset \,.\, \sim (x) \,.\, \varphi x$

„Dacă φ nu are loc pentru unii indivizi, atunci este fals că φ are loc întotdeauna".

Dem. T2a:

$$\left[1.9 \quad \frac{\varphi y}{\sim \varphi y}\right] \vdash : \sim \varphi y \,.\, \supset \,.\, (\exists x) \,.\, \sim \varphi x \qquad (1)$$

Aplicînd în (1) teorema de contrapoziție 2.15 obținem

$$\vdash : \sim (\exists x) \,.\, \sim \varphi x \,.\, \supset \,.\, \varphi y \qquad (2)$$

Din (2), aplicînd regula 1.10 de introducere a cuantificatorului universal, rezultă:

$$\vdash : \sim (\exists x) \,.\, \sim \varphi x \,.\, \supset \,.\, (y) \,.\, \varphi y$$

Aceasta din urmă, prin contrapoziție (teorema 2.15), dă

$$\vdash : \sim (y) \,.\, \varphi y \,.\, \supset \,.\, (\exists x) \,.\, \sim \varphi x$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Dem. T2b: Axioma 1.8 prin teorema de contrapoziție 2.16 dă:

$$\vdash : \sim \varphi y \,.\, \supset \,.\, \sim (x) \,.\, \varphi x \qquad (1)$$

Aplicînd în (1) regula de introducere a cuantificatorului particular 1.11 obținem:

$$\vdash \quad : (\exists y) \,.\, \sim \varphi y \,.\, \supset \,.\, \sim (x) \,.\, \varphi x \qquad \text{c.c.t.d.}$$

T2, în conformitate cu teorema 4.12, este echivalentă cu:

T2′ $\vdash : \sim (\exists x) \,.\, \sim \varphi x \,.\, \equiv \,.\, (x) \,.\, \varphi x$

Nu vom mai da demonstrațiile teoremelor ce urmează. Ele se fac pe aceleași principii cu cele expuse mai sus[32].

[32] Pentru detalii vedeți **Hilbert** și **Bernays**, *op. cit.*

T3 $\vdash : \sim (x) . \sim \varphi x . \equiv . (\exists x) . \varphi x$

Teoremele 2′ și 3 citite de la dreapta la stînga ne furnizează exprimarea unui cuantificator — universal și respectiv particular — în funcție de celălalt.

T3′ $\vdash : \sim (\exists x) . \varphi x . \equiv . (x) . \sim \varphi x$

Teoremele 2 și 3′ dau rezultatele obținute prin negarea propoziției universale și respectiv particulare.

Negînd propoziția universală afirmativă „toți x sînt φ", căpătăm, conform teoremei 2, propoziția particulară negativă „unii x nu sînt φ"; negînd propoziția particulară afirmativă „unii x sînt φ", căpătăm propoziția universală negativă „toți x nu sînt φ"[33].

T4a $\vdash :. (x) . p \supset \varphi x . \supset : p . \supset . (x) . \varphi x$

T4b $\vdash :. p . \supset . (x) . \varphi x : \supset . (x) . p \supset \varphi x$

Ca urmare a celor două implicații stabilite de teoremele 4a și 4b,

T4 $\vdash :. (x) . p \supset \varphi x . \equiv : p . \supset . (x) . \varphi x$

Deci afirmația că o propoziție dată implică pentru fiecare obiect că el are o proprietate dată, și afirmația că propoziția noastră implică faptul că toate obiectele au proprietatea respectivă, sînt unul și același lucru. Este evident cum, astfel tratate, expresii complicate din limbajul curent își lămuresc pe deplin sensul.

T5 $\vdash :. (x) . p \vee \varphi x . \equiv : p . \vee . (x) . \varphi x$

Este o replică în termenii disjuncției a teoremei 4.

T6 $\vdash :. (x) . p . \varphi x . \equiv : p . (x) . \varphi x$

Același lucru de astă dată în termenii conjuncției. Conjuncția are însă — spre deosebire de disjuncție — o

[33] Soluția dată problemei negării celor două feluri de propoziții este discutabilă din punct de vedere logic, așa cum am arătat în articolul *La Négation des Quantificateurs* („Acta Logica", 1967).

proprietate analogă cînd ambii ei termeni sînt funcții de x, și anume

T7 $\vdash :. (x) . \varphi x . \psi x . \equiv : (x) . \varphi x : (x) . \psi x$

Proprietățile exprimate de teoremele 5 și 6 au loc și pentru cuantificatorul particular, respectiv

T8 $\vdash :. (\exists x) . p \vee \varphi x . \equiv : p . \vee . (\exists x) . \varphi x$

T10 $\vdash :. (\exists x) . p . \varphi x . \equiv : p : (\exists x) . \varphi x,$

pe cînd, în acest caz, proprietatea de felul celei exprimate de T7 este valabilă doar dacă înlocuim conjuncția prin disjuncție

T9 $\vdash :. (\exists x) . \varphi x \vee \psi x . \equiv : (\exists x) . \varphi x . \vee . (\exists x) . \psi x$

În sfîrșit, următoarele teoreme pot fi citite cu ușurință și exprimă proprietăți evidente:

T11 $\vdash :. (x) . \varphi x \supset \psi x . \supset : (x) . \varphi x . \supset . (x) . \psi x$

Dacă φx implică întotdeauna ψx, atunci „φx întotdeauna" implică „ψx întotdeauna".

T12 $\vdash :. (x) . \varphi x \supset \psi x . \supset : (\exists x) . \varphi x . \supset . (\exists x) . \psi x$

T16a $\vdash :. (x) . \varphi x \supset p . \equiv : (\exists x) . \varphi x . \supset . p$

T16b $\vdash :. (\exists x) . \varphi x \supset p . \equiv : (x) . \varphi x . \supset . p$

T17a $\vdash :. (x) . \varphi x \equiv \psi x . \supset : (x) . \varphi x . \equiv . (x) . \psi x$

T17b $\vdash :. (x) . \psi x \equiv \psi x . \supset : (\exists x) . \varphi x . \equiv . (\exists x) . \psi x$

* 3.13. Teoria tipurilor

S-ar părea că, prin ordinea și rigoarea introdusă de simbolica și tehnica formală, raționamentul s-a redus la niște operații atît de simple și de elementare încît orice teamă de greșeală dispare. Calculele își efectuează fără greș sarcina, ducîndu-ne infailibil la rezultat. Totuși nu

este așa. Simbolurile înseși pot deveni în orice moment dintr-un ajutor o piedică prin confuziile la care pot da naștere. Și aceasta imediat ce, pierzînd din vedere semnificația logică pe care le-am acordat-o, începem să le manevrăm automat.

Astfel, o dată cu edificarea logicii formale, au apărut în cadrul ei și primele paradoxe expuse formal. Burali-Forti, Cantor, Russell etc. au expus tot atîtea antinomii care au zguduit puternic întreaga teorie, obligînd-o să-și ia măsurile cuvenite de securitate.

Pentru a vedea mai îndeaproape cum stau lucrurile, vom expune unul din aceste paradoxe care întrebuințează doar noțiunea de funcție propozițională și a fost găsit de Russell în 1905[34].

Să examinăm un predicat oarecare: dacă are proprietatea exprimată de el însuși, vom spune că are proprietatea de a fi *predicabil*; în caz contrar, are proprietatea de a fi *impredicabil*. De exemplu, predicatul „abstract" este el însuși abstract, deci este predicabil; dimpotrivă, predicatul „mamifer" nu este el însuși mamifer, deci este impredicabil.

Un predicat are sau nu proprietatea pe care o exprimă, este deci predicabil sau impredicabil, *tertium non datur*.

În particular predicatul „impredicabil" trebuie să fie predicabil sau impredicabil, o a treia posibilitate nu există. Dacă este predicabil, atunci admite proprietatea exprimată de el însuși, deci este impredicabil; dacă este impredicabil, atunci are proprietatea exprimată de el însuși, deci este predicabil!

Contradicția apare și mai clar, traducînd în simbolistica calculului cu funcții acest paradox. Notînd cu *Imp* predicatul „impredicabil", căpătăm o funcție propozițională care poate avea drept argumente tot predicate *Imp* (ψ). Definiția sa este

$$Imp\ (\psi) = \sim \psi\ (\psi) \qquad Df.$$

[34] Pentru aceasta și pentru alte paradoxe vezi lucrarea noastră *Soluția paradoxelor logico-matematice*, Ed. științifică, 1966, cap. III.

„ψ este impredicabil dacă și numai dacă ψ nu are proprietatea ψ". Aceasta are loc pentru orice predicat ψ, și în particular pentru predicatul *Imp*, adică pentru $\psi = Imp$, în care caz obținem:

$$Imp\ (Imp) \equiv \sim Imp\ (Imp)$$

Propoziția «„impredicabil" este impredicabil» este echivalentă cu propoziția «„impredicabil" nu este impredicabil», ceea ce este absurd.

Russell consideră că asemenea paradoxe sînt de natură pur logică și se nasc din nesocotirea „principiului cercului vicios" *(vicious circle principle)*. Acesta spune că ceea ce presupune o colecție luată în totalitatea ei nu trebuie să fie un membru al colecției[35]. Predicatul „impredicabil" nu poate fi un membru al colecției predicatelor impredicabile, cu alte cuvinte nu poate fi afirmat despre sine însuși. Pentru a asigura respectarea acestui principiu, el împarte proprietățile în *tipuri*, creînd ceea ce s-a numit *teoria tipurilor*. În ce constă ea?

Russell distinge mai întîi „indivizii", adică obiectele care nu sînt proprietăți (tipul zero). În cadrul proprietăților, el distinge următoarele tipuri: proprietățile indivizilor (tipul întîi), proprietățile proprietăților indivizilor (tipul doi) etc. Să luăm ca exemplu de individ corpurile; în cazul acesta, „triunghiular", „roșu" sînt proprietăți de tipul întîi, iar „proprietate spațială", „culoare" sînt proprietăți de tipul doi etc. Teoria tipurilor afirmă că o proprietate de tipul întîi nu poate să aparțină decît indivizilor (sau să nu le aparțină); în nici un caz ea nu poate fi atribuită proprietăților de tipul întîi sau de tip superior. O proprietate de tipul doi nu poate să aparțină (sau să nu aparțină) decît proprietăților de tipul întîi, nu poate fi atribuită indivizilor, proprietăților de tipul doi sau de tip superior ș.a.m.d. Spre exemplu, dacă *a* și *b* sînt corpuri, propozițiile „*a* este triunghiular", „*b* este roșu" sînt adevărate sau false și în orice caz au sens, pe cînd „*a* este proprietate spațială", „triunghiular este roșu" sînt lipsite de sens,

[35] *Principia Mathematica*, vol. I, p. 40.

nu au decît aparență de propoziții. Asemenea pseudoenunțuri sînt evitate, atribuind o proprietate de tipul n doar uneia de tipul $n-1$. În particular, ceea ce este important pentru noi, o proprietate nu-și poate fi atribuită ei însăși. Expresii ca $\sim \psi(\psi)$, întrebuințată în definiția precedentă, sînt declarate fără sens și prin urmare excluse. În acest fel paradoxul „impredicabil" nu mai apare[36].

* 3.14. Considerații generale

Atît calculul propozițional bivalent cît și cel al funcțiilor propoziționale sînt, după cum se vede, destul de simple. Din cîteva propoziții primitive se scoate întreaga serie de teoreme. Trebuie observat însă că principiile logicii clasice — dubla negație, principiul contradicției, principiul terțiului exclus, principiul silogismului — sînt teoreme în logica bivalentă, adică propoziții demonstrate, nu admise axiomatic, și anume următoarele teoreme ale calculului propozițional:

2.06 $\vdash :. p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r$ (principiul silogismului)

2.11 $\vdash . p \vee \sim p$ (principiul terțiului exclus)

3.24 $\vdash . \sim (p . \sim p)$ (principiul contradicției)

4.13 $\vdash . p \equiv \sim (\sim p)$ (principiul dublei negații)

---

[36] În prima ediție a *Principiilor* (1910) apăreau, pe lîngă distincțiile dintre tipuri, distincții de ordine între funcțiile propoziționale, sub numele de „teoria ramificată a tipurilor". Aceste distincții însă îngreuiază mult, dacă nu fac chiar imposibil, programul urmărit de Whitehead și Russell, de a exprima cu ajutorul aparatului logico-matematic întreaga matematică. Astfel încît ei se văd nevoiți să introducă o nouă axiomă: axioma de reductibilitate *(axiom of reducibility)*. Aceasta însă conduce la noi paradoxe. În urma criticilor aduse de Chwistek și Ramsey, autorii *Principiilor* au renunțat în ediția a doua a acesteia, din 1925, la teoria ramificată a tipurilor și la axioma de reductibilitate.

Cu ajutorul acestui sistem, Russell, ca și predecesorul său G. Frege, urmărea așezarea matematicii pe baze logice, derivarea conceptelor și a propozițiilor acesteia din concepte și propoziții logice. De aici și nevoia de a asigura atît economia cît și rigoarea sistemului său, căci prin el urma să se clarifice natura conceptelor și a raționamentului matematic.

Logica astfel construită diferă fundamental de logica clasică propriu-zisă și, în primul rînd, de aceea a lui Aristotel. Intuiția este eliminată, simbolul căpătînd putere absolută. La început, scrie Hilbert, este semnul. Numai că, așa cum observa și Leon Brunschvicg, „în simbolul însuși rămîne totdeauna un reziduu oarecare de intuiție"[37].

Caracteristica generală a logicii, așa cum o concep Russell, Hilbert și ceilalți logicieni matematicieni, o constituie *extensionalismul*. Fie că studiază relații între propoziții, ca în calculul propozițional, fie că studiază relații între obiecte și indivizi, ca în calculul cu funcții, o face de fiecare dată luînd în considerare în mod exclusiv aspectul extensional al acestora și neglijînd pe cel intensional sau de conținut. Simplificarea astfel adusă logicii tradiționale conduce la așezarea calculului într-o schemă extrem de simplă, schemă care a fost pusă în evidență pentru calculul propozițional de L. Wittgenstein.

Să reluăm o funcție de adevăr elementară oarecare, de exemplu:

$$f(p, q) = p \vee q$$

Fie un caz concret:

$$p = \text{afară plouă}$$

$$q = (\text{afară}) \text{ ninge}$$

Ce spune disjuncția logică „afară plouă sau ninge"? Nimic altceva decît că, dacă afară plouă, plouă; dacă afară ninge, ninge; dacă afară plouă sau ninge, plouă sau

[37] **L. Brunschvicg,** *Les étapes de la philosophie mathématique*, ed. a III-a, Paris, 1929, p. 400.

ninge etc. Cu alte cuvinte, funcțiile de adevăr nu ne pot informa cu nici un chip despre lumea exterioară, ele nu exprimă nici un comportament efectiv. Există însă două cazuri extreme ale funcțiilor de adevăr. Sînt funcții de adevăr care sînt adevărate, oricare ar fi valorile de adevăr ale argumentelor; altele sînt false, orice valori de adevăr am atribui argumentelor. De pildă, funcția simplă

$$f(p) = p \vee \sim p$$

este adevărată, fie că p este adevărat, fie că este fals; ea este o *tautologie*. Dimpotrivă, funcția

$$f(p) = p \,.\, \sim p$$

este falsă, fie că p este adevărat, fie că este fals; ea este numită de Wittgenstein o *contradicție*[38].

Însă iată ce se întîmplă: dacă examinăm teoremele din *Principii*, date mai înainte cu numerotația respectivă, ne convingem imediat că ele sînt tautologii.

Fie, de exemplu, teorema

$$2.2 \quad \vdash : p \,.\, \supset \,.\, p \vee q$$

Să construim tabelul respectiv, cum am făcut cînd am studiat funcțiile de adevăr:

p	q	$p \vee q$	$p \,.\, \supset \,.\, p \vee q$
A	A	A	A
F	A	A	A
A	F	A	A
F	F	F	A

Teorema $p \,.\, \supset \,.\, p \vee q$ este adevărată totdeauna, nu mai depinde de adevărul sau falsitatea argumentelor p și q. Se poate vedea în același mod, pentru oricare din teoremele de mai sus, că sînt tautologii.

[38] Termenii „tautologie" și „contradicție", în sensul utilizat aici, se datoresc lui **Wittgenstein** (*Tractatus Logico-Philosophicus*, 4.46). Ele nu se referă la denotatul categoriei dialectice „contradicție".

Şi teoremele din calculul cu funcţii sînt într-un anume sens nişte tautologii. Pentru a descifra acest lucru, să ne întoarcem pentru moment la ceea ce numeam o funcţie propoziţională, adică la o expresie conţinînd una sau mai multe variabile şi care devine o propoziţie de îndată ce aceste variabile sînt înlocuite prin valori date. Exemplul dat de noi atunci era „x este muritor", expresie ce devine o propoziţie (adevărată sau falsă) imediat ce înlocuim pe x prin diverşi indivizi care pot să fie sau nu muritori (ex. Platon, Aristotel, Prometeu etc.). Luăm în considerare, după cum am văzut, şi expresii în care însuşi predicatul propoziţiei (în cazul nostru „muritor") era o variabilă φ, acestea putînd fi scrise sub forma „x este φ" sau φx. Ele deveneau propoziţii înlocuind mai întîi variabila φ printr-un predicat dat, iar apoi fie cuantificînd variabila x într-unul din cele două moduri — universal şi particular —, fie înlocuind-o printr-un individ din domeniul predicatului respectiv. Dar, aşa cum în calculul propoziţional propoziţiile nu erau privite decît sub aspectul valorii lor de adevăr, iar variabilele propoziţionale considerate ca nişte simple variabile bivalente, şi aici predicatele nu sînt socotite decît ca nişte funcţii ale căror argumente pot varia într-un anumit domeniu; funcţiile acestea pot lua doar două valori: adevărul (A) şi falsul (F). Indivizii din care este compus domeniul respectiv sînt, de asemenea, despuiaţi de orice caractere particulare, rămînînd în joc doar numărul lor. Într-o asemenea viziune simplificatoare, drept predicat poate fi considerată orice funcţie definită pe un domeniu de n indivizi (ce pot fi luaţi chiar primele n numere naturale: 1, 2, ...n) şi ale cărei valori sînt: A şi F. Se pot lua în considerare chiar şi funcţii definite pe mulţimea tuturor numerelor naturale, deci predicate avînd un domeniu infinit de indivizi.

În aceste condiţii, să considerăm o formulă demonstrată în calculul cu funcţii (o teoremă). Spre exemplu:

T1 $\vdash : (x) . \varphi x . \supset . (\exists x) . \varphi x$

Ea are următoarea proprietate: oricum am alege predicatul f și l-am substitui lui φ în această formulă, rezultatul va fi întotdeauna o propoziție adevărată. Pentru a înțelege mai bine acest lucru, să ne alegem un predicat f la întîmplare. După cum am spus, esențial este pentru aceasta alegerea unui număr de indivizi pentru domeniul predicatului respectiv, să zicem doi (în care caz domeniul poate fi considerat pentru simplificare chiar mulțimea formată din numerele 1 și 2 : $\{1, 2\}$) și modul în care, pentru fiecare dintre cei doi indivizi, predicatul este satisfăcut (ia valoarea A) sau nu (ia valoarea F). Să spunem pentru moment că predicatul f este satisfăcut de individul 1 ($f(1) = A$), dar nu e satisfăcut de individul 2 ($f(2) = F$). Urmează că predicatul nu este satisfăcut în tot domeniul său și deci propoziția $(x) \,.\, f(x)$ este falsă (ia valoarea F); dar este satisfăcut pentru unii indivizi din domeniu, și anume pentru individul 2, deci propoziția $(\exists x) \,.\, f(x)$ este adevărată (ia valoarea A). În consecință, rezultatul substituirii lui φ în T1 prin predicatul f:

$$(x) \,.\, fx \,.\, \supset \,.\, (\exists x) \,.\, fx,$$

care se mai poate scrie ținînd seama de definiția implicației (1.01)

$$\sim (x) \,.\, fx \,.\vee.\, (\exists x) \,.\, \sim fx,$$

este o propoziție adevărată.

Pe același domeniu cu doi indivizi se mai pot defini încă trei predicate, după cum $f(1)$ și $f(2)$ iau valorile de adevăr AA, FA și FF. Cititorul poate verifica și singur că în aceste cazuri propoziția care se obține din T1 are valoarea A (adevărat). Mai mult însă, orice domeniu am lua (finit sau nu) și orice predicat ar fi definit pe acest domeniu, formula T1 este verificată. Această proprietate a ei se numește *validitate (universală)* și ea generalizează la calculul cu funcții proprietatea de tautologie din calculul propozițional. Toate teoremele din calculul bivalent cu funcții sînt universal valide[39].

[39] Vedeți **Hilbert** și **Bernays**, *op. cit.*, vol. I, ed. a II-a, 1968, p. 8 și p. 127.

Şi acum să ne reîntoarcem la acest caracter extensional pe care am observat că-l are logica lui Russell. El este o consecinţă necesară a orientării logicienilor către aspectul pur formal, lăsînd deoparte complet conţinutul conceptelor şi semnificaţia propoziţiilor, pentru a ţine seama doar de extensiunea şi, respectiv, valoarea de adevăr a acestora. Această renunţare nu se poate face însă fără consecinţe dintre cele mai serioase cu privire la semnificaţia unei astfel de logici. Ceea ce i-a determinat pe numeroşi logicieni să-i conteste parţial sau integral valoarea.[40] Cele mai importante critici le-a suscitat, după cum vom vedea, semnificaţia funcţiei pe care Russell o numeşte implicaţie. Cum poate fi considerată „relaţie de deductibilitate" între două propoziţii cea care are loc ori de cîte ori prima propoziţie este falsă sau a doua propoziţie este adevărată? Şi cum se poate constitui matematica pe o logică în care dintr-o propoziţie falsă se poate deduce orice propoziţie? Căci aceasta este semnificaţia exactă a teoremei:

2.21 $\vdash : \sim p \,.\, \supset \,.\, p \supset q$

Ne rezervăm însă acest subiect de discuţie pentru capitolul următor.

[40] **G. Klaus,** *Moderne Logik*, ed. a II-a, 1965 ş. a.

4
Logica implicației stricte

* 4.1. Implicația strictă

Logicianul american C.I. Lewis pleacă de la critica noțiunii de implicație, așa cum este definită de Russell[1]. Pentru Lewis implicația russelliană este o implicație materială, deoarece ea are înțelesul exact de «afirmația „*p* este adevărat și *q* fals" este o afirmație falsă». (*„The Statement* p *is true and* q *is false, is a false statement"*)[2]. Acesta nu este însă, după el, sensul obișnuit al implicației.

Diferența dintre inferența obișnuită și implicația lui Russell este ilustrată de Lewis în propozițiile *o propoziție falsă implică orice, iar o propoziție adevărată este implicată de orice*, care aparțin implicației russelliene. Din cauză că o propoziție falsă implică orice, ca de exemplu «„Luna este făcută din brînză verde" implică „2 + 2 = 4"», urmează că în sistemul implicației materiale (a lui Rus-

[1] **C. I. Lewis:** *A Survey of Simbolic Logic* (University of California Press, Berkeley, 1918). Lewis a adus între timp modificări sistemului său în urma criticilor făcute în special de Oskar Becker. Completările la sistemul său au apărut în *Alternative Systems of Logic* („Monist", 42, 1932) și în *Symbolic Logic* (New York, 1932), aceasta din urmă scrisă în colaborare cu **C. H. Langford.**

[2] *Ibidem*, p. 291.

sell) există o clasă de propoziții care nu pot fi aplicate la o inferență valabilă[3]. Tot astfel, deoarece clasa zero este cuprinsă în orice clasă, putem spune: «dacă „nu există șerpi de mare", atunci „toți șerpii de mare sînt artropozi"», propoziție care urmează cu necesitate. In cazul acesta, clasa șerpilor de mare este zero; clasa artropozilor există, deci cuprinde clasa zero, a șerpilor de mare[4].

De unde rezultă aceste consecințe, care par arbitrare și bizare *(queer)*? Lewis conchide că aceste consecințe curioase se datoresc faptului că implicația la Russell este o relație în extensiune (în sferă) fără nici o relație analogă în intensiune (în conținut)[5]. Inferența însă, după el, depinde de înțelesul *(meaning)* propozițiilor; de aceea ea este o relație în intensiune. În condițiile acestea, implicația lui Russell îi apare lui Lewis ca o implicație materială, deoarece numai în cazurile materiale date se poate stabili o inferență reală, altfel ea nu spune nimic și din această cauză este contingentă.

Nu există nici o necesitate în legătura dintre propoziții (fiindcă nu există relații în intensiune, ci numai între valorile de adevăr ale propozițiilor). Implicația russelliană are astfel sensul «„*p* implică material *q*" înseamnă „este fals că *p* este adevărat și *q* e fals"». Această afirmare simultană a adevărului lui *p* și *q* este arbitrară, fără nici o conexiune între faptele pe care le reprezintă *p* și *q*.

Lewis introduce un sens riguros pentru implicație. Și anume implicația este definită de el astfel: „este *imposibil* ca propoziția *p* să fie adevărată și *q* falsă".

---

[3] *Ibidem*, p. 326, cap. „*The meaning of implies*".

[4] Această deosebire între implicația *materială* și implicația formală era bine cunoscută logicienilor scolastici. Ei numeau aceste două feluri de implicații *consequentia materialis* și *consequentia formalis*. Pentru *consequentia materialis*, scolasticii citau două reguli (pe care le pomenește și Lewis): 1) *Ex vero nunquam sequitur falsum* („din adevăr nu urmează niciodată falsul"); 2) *Ex falsis potest sequi verum* („din [propoziții] false poate urma adevărul"). Ca exemplu de consecință materială „bună" ei dădeau exemple tot atît de paradoxale ca și ale lui Lewis, de pildă: *homo est asinus, ergo baculus stat in angulo* („omul este un asin, deci bățul se află în colț"). A se vedea: **A. Dumitriu,** *Istoria logicii*, cap. XXII.

[5] **C. I. Lewis,** *op. cit.*, p. 327.

Cu alte cuvinte, între propozițiile p și q se introduce o legătură de necesitate; dacă p este adevărat, cu necesitate q este adevărat.

Acest sens nu-l avea implicația lui Russell. Conexiunea dintre propoziții era arbitrară și consecințele erau deci contingente. Pentru a face distincția între implicația materială și implicația definită cu ajutorul imposibilității — și pe care Lewis o numește *implicația strictă (strict implication)* —, el introduce o nouă noțiune, aceea de posibilitate, pe care o desemnează prin simbolul „$\Diamond$". Agregatul format prin punerea acestui semn în fața unei propoziții p, $\Diamond p$, va avea înțelesul de „p este logic posibil (necontradictoriu)".

Definiția implicației materiale, sub formă de conjuncție, este:

$$p \supset q \;.=.\; \sim (p \;.\; \sim q)$$

«„p implică material q" înseamnă „este fals că p este adevărat și q fals"».

Definiția implicației stricte a lui Lewis va fi, întrebuințînd pentru noțiunea de implicație strictă, simbolul „$\prec$",

$$p \prec q \;.=.\; \sim \Diamond (p \;.\; \sim q),$$

«„p implică strict q" înseamnă „nu este logic posibil (este imposibil) ca p să fie adevărat și q fals"».

Cu aceasta, Lewis afirmă că implicația strictă conține implicația materială așa cum apare în *Principia Mathematica*, ca pe un sistem parțial, și mai cuprinde o parte suplimentară, relațiile în intensiune.

Iată însă care este reforma importantă în sensul nou pe care-l dă Lewis implicației. El introduce o nouă valoare pentru propoziții, în afară de adevăr și fals: *posibilitatea*. Cu aceasta începe să fie considerată o propoziție din punctul de vedere al modalității ei și vom găsi pentru propoziții mai multe valori de adevăr.

Logica implicației stricte este prin urmare o logică polivalentă.

Primul care a introdus modalitatea în calculul logic a fost Hugh Mac Coll[6] în anul 1906, pe lucrările căruia se sprijină, de altfel, și Lewis. Mac Coll considera, în afară de adevărul și falsitatea unei propoziții, modalitățile judecății: „necesitatea", „realitatea" (adevărul) și „posibilitatea". După Mac Coll, judecățile au următoarele predicate fundamentale: necesar *(certain)*, imposibil *(impossible)*, adevărat *(true)*, fals *(false)*, variabil *(variable)*. Variabil înseamnă aici „nici necesar și nici imposibil", adică posibil adevărat sau posibil fals. Mai precis, afirmația că este posibil ca o propoziție p să fie adevărată sau falsă înseamnă că este nesigură, „*uncertain*".

Se vede că, spre deosebire de sistemul lui Russell, noțiunile introduse de Mac Coll, și în legătură cu el de Lewis, corespund și limbajului obișnuit.

Lewis și-a numit logica sa, după noțiunea care-i stă la bază, „Sistemul implicației stricte" *(System of strict implication)*[7].

* 4.2. Idei primitive (nedefinite)

Ideile fundamentale de la care pleacă Lewis pentru a construi sistemele implicației stricte sînt următoarele:

1. *Propoziții*: p, q, r etc.

2. *Negația*: $\sim p$, care înseamnă „p este fals" sau „non-p".

3. *Produsul logic*: pq sau $p \,.\, q$ (punctul ca semn de despărțire fiind utilizat doar cînd termenii produsului sînt expresii complexe). El are semnificația de „p este adevărat și q este adevărat" sau „p și q sînt ambele adevărate" sau simplu „p și q".

---

[6] **Hugh Mac Coll**, *Symbolic Logic and its applications*, Longmans, London, 1906.

[7] Discipolii lui Lewis au edificat sisteme asemănătoare; de exemplu **W. Parry, J. E. Nelson** etc. Din cuprinsul acestui capitol vom vedea că există de fapt mai multe sisteme ale implicației stricte.

4. *Posibilitatea* sau *compatibilitatea cu sine însăși (self consistency)*: $\Diamond p$, care înseamnă „p este posibil" sau „este posibil ca p să fie adevărat"[8].

5. *Echivalența logică*: $p = q$, care este în același timp și relația de definiție.

* 4.3. Definiții

În termenii produsului logic și ai negației, Lewis definește relația $p \vee q$: „Cel puțin una dintre propozițiile p și q este adevărată", adică

11.01 $\quad p \vee q \;.=.\; \sim(\sim p \sim q)$

unde $p \vee q$ poate fi citită „p sau q".

Implicația strictă este definită cu ajutorul negației, posibilității și produsului logic, așa cum am menționat.

11.02 $\quad p \prec q \;.=.\; \sim \Diamond (p \sim q)$

unde $p \prec q$ poate fi citită „p implică (strict) q" și înseamnă „nu este posibil (este imposibil) ca p să fie adevărat și q fals"[9].

Și acum, un fapt ciudat și paradoxal. Se va defini însăși relația de definiție, echivalența logică:

11.03 $\quad p = q \;.=:\; p \prec q \;.\; q \prec p,$

---

[8] Din dezvoltarea sistemului rezultă că afirmarea posibilității lui p, $\Diamond p$, este echivalentă cu afirmarea faptului că p nu implică negația sa și deci este compatibilă cu ea însăși.

[9] În lucrarea sa din 1918, *A Survey of Symbolic Logic*, **Lewis** a luat ca idee primitivă, în locul celei de posibilitate, ideea de *imposibilitate*, pe care a notat-o cu simbolul „$\sim$". Dar atunci, pentru a nu o confunda cu negația, a notat-o pe aceasta din urmă cu semnul minus „$-$". Ulterior, el a eliminat această complicare de notație prin folosirea ideii de posibilitate, al cărei simbol am văzut că este „$\Diamond$". În acest caz imposibilitatea va putea fi definită cu ajutorul negației obișnuite „$\sim$" și a posibilității „$\Diamond$", anume „$\sim \Diamond$", adică nonposibilitatea.

ceea ce nu ne dispensează s-o luăm și ca idee primitivă, pentru a o putea utiliza ca relație de definiție. Aici însă, Lewis recunoaște un cerc vicios[10].

* 4.4. Propoziții primitive

Postulatele, adică propozițiile admise fără demonstrație, sînt:

11.1 $pq \,.\prec.\, qp$

Acest postulat exprimă legea comutativității produsului logic: dacă p și q sînt adevărate, atunci q și p sînt adevărate.

11.2 $pq \,.\prec.\, p$

Dacă p și q sînt adevărate, atunci p este adevărat.

11.3 $p \,.\prec.\, pp$

Dacă p este adevărat, atunci „p și p" este adevărată.

11.4 $(pq)\,r \,.\prec.\, p\,(qr)$

înseamnă că «„(p și q) și r" implică „p și (q și r)"»; aceasta exprimă legea asociativității produsului logic.

11.5 $p \,.\prec.\, \sim(\sim p)$

Dacă p este adevărat, atunci este fals că p este fals.

11.6 $p \prec q \,.\, q \prec r :\prec.\, p \prec r$

Dacă p implică q și q implică r, atunci p implică r. Este principiul silogismului[11].

---

[10] **C. I. Lewis,** *op. cit.*, p. 293.

[11] Sub numele acesta înțelegem în logica bivalentă una din următoarele două teoreme:

2.05 $q \supset r \,.\supset: p \supset q \,.\supset.\, p \supset r$

2.06 $p \supset q \,.\supset: q \supset r \,.\supset.\, p \supset r$ →

11.7 $p \,.\, p \prec q : \prec .\, q$

Dacă p este adevărat și $p \prec q$, atunci q este adevărat, ceea ce exprimă o proprietate evidentă a oricărei relații de inferență.

J.C.C. McKinsey a reușit să arate însă că postulatul 11.5 poate fi dedus pe baza anumitor reguli din celelalte șase axiome[12].

În prima sa încercare de a edifica un sistem al implicației stricte făcută în *A Survey of Symbolic Logic* (1918), Lewis pornea de la următoarele 8 postulate:

1. $pq \,.\, \prec .\, qp$
2. $qp \,.\, \prec .\, p$
3. $p \,.\, \prec .\, pp$
4. $p(qr) \,.\, \prec .\, q(pr)$
5. $p \prec \sim(\sim p)$
6. $p \prec q \,.\, q \prec r : \prec .\, p \prec r$
7. $\sim \Diamond p \prec \sim p$

Dacă p este imposibil, atunci p este fals.

8. $p \prec q \,.\, = \,.\, \sim \Diamond q \prec \sim \Diamond p$

adică: „p implică q" este echivalent cu „„q este imposibil" implică „p este imposibil"". E. L. Post a arătat însă că atunci se ajunge la consecința:

$$\sim \Diamond p \,.\, = \,.\, \sim p,$$

adică „imposibilul este identic cu falsul", și deosebirea pe care Lewis urmărea s-o facă între implicația strictă și cea materială

E de remarcat însă faptul că Lewis nu le consideră principii valide de deducție (*Symbolic Logic*, p. 496). S-a demonstrat de altfel că analogele lor stricte

$$q \prec r. \prec : p \prec q \,.\, \prec .\, p \prec r$$

$$p \prec q \,.\, \prec : q \prec r \,.\, \prec .\, p \prec r$$

nu pot fi deduse din postulatele admise aici (*Symbolic Logic*, Appendix III, p. 507, ed. a II-a, 1959).

[12] *A Reduction in the Number of Postulates for C. I. Lewis's System of Strict Implication*, în „Bulletin of the American Mathematical Society", vol. 40, pp. 425—427.

dispare, sistemul său reducîndu-se la cel din *Principia Mathematica*. Aceasta a atras după sine revizuirea sistemului și înlocuirea axiomei 8 cu următoarea:

$$8'. \quad p \prec q \,.\, \prec \,.\, \sim \Diamond q \prec \sim \Diamond p$$

În *Symbolic Logic* (1932), scrisă în colaborare cu C. H. Langford — singura pe care o vom urmări de aici înainte —, Lewis propune un nou sistem formal de logică, în care se pot demonstra mai puține teoreme și care poartă în literatura de specialitate numele de *sistemul I* (S1), cel dedus din postulatele 11.1— 11.7. Sistemul din *A Survey of Symbolic Logic*, modificat și avînd postulatele 1—7, 8′, se numește sistemul 3 (S3). Vom vedea că există și alte sisteme ale implicației stricte.

* 4.5. Teoreme

Operațiile prin care, din aceste postulate, se pot deriva teoremele sistemului, sînt următoarele:

1. *Substituția*

(a) Orice propoziții legate prin semnul „=" pot fi substituite una cu cealaltă.

(b) Într-o propoziție, oricare din variabilele acesteia, p, q, r etc., poate fi substituită — peste tot unde apare — cu o altă propoziție.

Modul în care diversele simboluri primitive (idei primitive) se pot combina între ele pentru a da propoziții se poate defini din aproape în aproape astfel:

1. p, q, r etc. sînt propoziții.

2. Dacă p este o propoziție, atunci $\sim p$ și $\Diamond p$ sînt propoziții.

3. Dacă p și q sînt propoziții, atunci $p \,.\, q$ și $p = q$ sînt propoziții.

După cum se poate observa, simbolurile p, q, r etc. sînt utilizate în două sensuri distincte: ca figurînd în locul unor propoziții concrete (de exemplu „Socrate este om" etc.), dar nedeterminate, sau în locul unor combinații de propoziții [de exemplu $\sim \Diamond (p \sim q)$]. Pentru a le distinge, pe primele le-am și numit deja — la punctul (b) de mai sus — *variabile.*

2. *Adjuncția*

Dacă două propoziții — p și q — pot fi afirmate separat, atunci și produsul lor logic — $p\,q$ — poate fi afirmat.

3. *Inferența*

Dacă p și $p \prec q$ sînt afirmate, atunci q poate fi și el afirmat.

Și acum să trecem la demonstrarea cîtorva teoreme[13].

Procedeul prin care se indică operațiile ce trebuie făcute pentru a demonstra o teoremă este asemănător cu acela utilizat de Whitehead și Russell în *Principia Mathematica*. Se indică schema sub teoremă, arătîndu-se ce substituții trebuie făcute. De exemplu schema

$$[11.2 : p/q]$$

arată că în formula 11.2 trebuie substituit numărătorul p al fracției în locul numitorului q.

După substituție, Lewis indică și consecințele.

Vom da mai întîi în amănunt o demonstrație pentru prima teoremă, celelalte urmînd a fi numai indicate.

12.1 $\quad p \prec p$

Demonstrație:

$$[11.2 : p/q]pp \,.\prec.\, p \qquad (1)$$

S-a notat cu (1) rezultatul obținut în urma primei substituții: $pp \,.\prec.\, p$.

A doua substituție, și care va fi reprezentată în demonstrație printr-un al doilea rînd, este:

$$[11.6 : pp/q \;;\; p/r]\ (11.3) \,.\, (1) : \prec \,.\, p \prec p$$

Ea indică deci substituirea în 11.6 a lui pp în locul lui q și a lui p în locul lui r. Efectuînd-o, obținem:

$$\underbrace{p \,.\prec.\, pp}_{11.3} : \underbrace{pp \,.\prec.\, p}_{(1)} :. \prec \,.\, p \prec p$$

---

[13] Numerotarea acestor teoreme, ca și cea a postulatelor, este aceea indicată de Lewis în *Symbolic Logic*, cap. VI.

Adică s-a obținut, cum se vede, prin substituție, în membrul întîi al implicației produsul (11.3) . (1) — unde (1) reprezintă rezultatul obținut prin substituția anterioară — care implică tocmai teorema de demonstrat. Însă propozițiile 11.3 și (1) sînt adevărate, una fiind un postulat, cealaltă obținută printr-o substituție dintr-un postulat. În baza regulei de adjuncție, produsul lor este adevărat. Așadar, primul membru al implicației de mai sus este adevărat; deci, după regula inferenței, și membrul al doilea este adevărat, adică tocmai teorema noastră.

12.11 $p = p$

Demonstrație:

$[(12.1) . (12.1)] \quad p \prec p . p \prec p$ (1)

$[11.03 : \ p/q] \ p = p . = . (1)$

Făcînd operația de adjuncție a lui 12.1 cu ea însăși, obținem propoziția (1). În baza definiției echivalenței logice, 11.03, $p = p$ este echivalentă cu (1) și deci operația de substituție (a) ne permite s-o punem în locul ei.

Principiul 12.11 poartă numele de „principiul identității". În logica bivalentă l-am întîlnit sub forma teoremei 4.2.

12.15 $pq . = . qp$

Demonstrație:

$[11.1 : \ q/p ; \ p/q] \ qp . \prec . pq$ (1)

$[11.3 : \ pq/p ; \ qp/q] \ pq . \prec . qp : qp . \prec . pq :.$

$= : pq . = . qp$

$(11.1) . (1) : = : pq . = . qp$

12.15 poartă numele de „legea comutativității" produsului logic. În baza ei, în orice teoremă în care intervine un produs de două propoziții, ordinea acestora poate fi inversată.

12.17 $pq . \prec . q$

Demonstrație:

$[11.2 : q/p,\ p/q]\ qp\ .\prec .\ q$ (1)

$[(1),\ 12.15]\ pq\ .\prec .\ q$

Ultimul rînd din demonstrație este obținut prin aplicarea legii comutativității în antecedentul implicației (1). S-a înlocuit deci în (1), pe baza regulei de substituție (a) și a teoremei 12.15, produsul qp prin produsul pq.

12.2 $\sim p \prec q\ .=.\ \sim q \prec p$

Demonstrație:

$[12.11 : \sim \diamondsuit(\sim p \sim q)/p] \sim \diamondsuit(\sim p \sim q) =$

$= \sim \diamondsuit(\sim p \sim q)$ (1)

$[(1),\ 12.15]\ \sim \diamondsuit(\sim p \sim q) = \sim \diamondsuit(\sim q \sim p)$ (2)

$[11.02 : \sim p/p] \sim p \prec q\ .=.\ \sim \diamondsuit(\sim p \sim q)$ (3)

$[11.02 : \sim q/p;\ p/q] \sim q \prec p\ .=.\ \sim \diamondsuit(\sim q \sim p)$ (4)

$[(3),(4)](2)\ .=:\ Q.E.D.$

Ultimul rînd din demonstrație arată că, substituind în (2) ambii membri prin echivalenții lor deduși pe baza definiției 11.02 [rîndurile (3) și (4) din demonstrație], căpătăm teorema 12.2 notată prescurtat prin *Q.E.D.* *(quod erat demonstrandum)*.

12.25 $\sim(\sim p) \prec p$

Demonstrație:

$[12.1 : \sim p/p] \sim p \prec \sim p$ (1)

$[12.2 : \sim p/q] \sim p \prec \sim p\ .=.\ Q.E.D.$

$(1)\ .=.\ Q.E.D.$

În cele ce urmează nu vom mai expune demonstrațiile teoremelor. Ele se fac toate după același principiu. Vom

indica doar imediat dedesubtul teoremelor principalele axiome sau teoreme pe care se bazează fiecare din aceste demonstrații.

12.3 $p = \sim (\sim p)$

Dem.

[11.5, 12.25]

Această teoremă exprimă „principiul dublei negații".

Teorema 12.2, de care am mai vorbit, este o echivalență care pe baza definiției reprezintă afirmarea simultană a două implicații. Una dintre ele este teorema

12.4 $\sim p \prec q \,.\, \prec .\, \sim q \prec p$

Dem.

[11.2, 12.2]

Alte teoreme sînt:

12.41 $\sim p \prec \sim q \,.\, \prec .\, q \prec p$

Dem.

[12.3, 12.4]

12.42 $p \prec \sim q \,.\, \prec .\, q \prec \sim p$

Dem.

[12.3, 12.41]

12.43 $p \prec q \,.\, \prec .\, \sim q \prec \sim p$

Dem.

[12.3, 12.42]

12.44 $p \prec q \,.\, = .\, \sim q \prec \sim p$

Dem.

[12.41, 12.43]

12.45 $p \prec \sim q \;.=.\; q \prec \sim p$

Dem. [12.42]

Toate aceste teoreme sînt forme ale „principiului transpoziției".

12.5 $(pq)r \;.=.\; p(qr) \;.=.\; q(pr) \;.=.\; (qp)r$ etc., etc.

Dem. [11.4, 12.15]

Această teoremă exprimă faptul că într-un produs logic de trei factori (dar se poate generaliza la mai mulți) putem grupa oricum termenii și de aceea, în asemenea cazuri, parantezele pot fi omise.

12.6 $pq \;.\prec.\; r :=: q \sim r \;.\prec.\; \sim p :=: p \sim r \;.\prec.\; \sim q$

Dem. [12.3, 12.5]

Această teoremă poartă numele de legea „antilogismului". Dacă din două premise rezultă o concluzie, atunci dintr-una din premise și contrara concluziei rezultă contrara celeilalte premise.

Echivalențele din teorema 12.6 pot fi descompuse în implicații simple după definiția 11.03. Se obțin astfel:

12.61 $pq \;.\prec.\; r :\prec: p \sim r \;.\prec.\; \sim q$

12.62 $pq \;.\prec.\; r :\prec: q \sim r \;.\prec.\; \sim p$

Principiul silogismului (11.6) poate fi extins după cum urmează:

12.77 $p \prec q : qr \;.\prec.\; s :.\prec: pr \;.\prec.\; s$

Dem. [11.6, 12.6]

12.78 $p \prec q \;.\; q \prec r \;.\; r \prec s :\prec.\; p \prec s$

Dem. [11.6, 12.77]

Teorema 12.78 poate fi extinsă astfel încît dintr-un număr oarecare de implicații, prima implicație avînd drept consecvent pe antecedentul celei de-a doua, a doua avînd drept consecvent pe antecedentul celei de-a treia ș.a.m.d.,

să rezulte implicația dintre primul antecedent și ultimul consecvent, adică în fond un „polisilogism".

La demonstrarea teoremelor enunțate pînă acum nu s-a utilizat postulatul 11.7.[14] Incepînd de acum îl vom întrebuința.

12.8 $p \sim q \;.\prec.\; \sim (p \prec q)$

Dem. [12.61 : $p \prec q/q;\ q/r$] 11.7 $\prec$ *Q.E.D.*

12.81 $p \prec q \;.\prec.\; \sim (p \sim q)$

Dem. [12.42, 12.8]

Dacă p implică strict q, atunci nu este cazul ca p să fie adevărat și q fals.

Această teoremă are, în cadrul logicii pe care o studiem, o importanță deosebită, căci după cum am văzut, implicația materială sau russelliană $p \supset q$ putea fi definită (și o vom defini și noi în cele ce urmează) prin $\sim (p \sim q)$. S-a putut însă arăta că reciproca teoremei 12.81 nu este valabilă (nu este derivabilă din axiome), prin urmare această teoremă reprezintă singura legătură între implicația strictă și cea materială, și anume, dacă implicația strictă a două propoziții are loc, implicația lor materială are, de asemenea, loc.

Înainte de a trece la analiza mai detaliată a raportului dintre cele două implicații, vom da încă cîteva proprietăți ale implicației stricte, enunțate sub forma următoarelor teoreme:

12.84 $p \;.\prec.\; \sim (p \prec \sim p)$

O propoziție adevărată nu-și implică propria sa negație.

12.87 $p \prec \sim p \;.\prec.\; \sim p$

---

[14] Logicienii matematicieni au studiat și sistemul formal ce se obține pornind doar de la axiomele 11.1 — 11.6. Evident, teoremele sale sînt și teoreme ale lui S1 și din această cauză el se numește subsistem al lui S1. În literatura de specialitate acest sistem formal se notează cu S1°. (**R. Feys,** *Modal Logics*, Paris — Louvain, 1965, pp. 43—64.)

Dacă o propoziție își implică propria negație, atunci ea este falsă.

12.88 $\sim p \prec p \,.\prec\,. p$

O propoziție implicată de propria sa negație este o propoziție adevărată (principiul adevărului necesar).

În sfîrșit, principiul contradicției, ca și în logica bivalentă, este o teoremă.

12.9 $\sim (p \sim p)$

Pe baza teoremelor precedente și a definiției 11.01 (a disjuncției) se pot demonstra următoarele:

13.1 $p \vee q \,.\prec\,. q \vee p$

care este legea comutativității disjuncției.

13.21 $q \,.\prec\,. p \vee q$

13.3 $p \vee p \,.\prec\,. p$

13.4 $p \vee (q \vee r) \,.\prec\,. (p \vee q) \vee r$

13.41 $p \vee (q \vee r) \,.=\,. (p \vee q) \vee r \,.=\,. q \vee (p \vee r)$ etc.

Ultimele două teoreme exprimă asociativitatea disjuncției.

* 4.6. Implicația materială

Se adaugă definițiilor date în *4.3 încă două definiții, și anume a implicației materiale sau russelliene și care aici va purta numărul 14.01:

14.01 $p \supset q \,.=\,. \sim (p \sim q)$

și definiția echivalenței materiale:

14.02 $p \equiv q \,.=: p \supset q \,.\, q \supset p$

sau, ceea ce este totuna,

$$p \equiv q \,.\, = : \sim (p \sim q) \,.\, \sim (q \sim p)$$

Prin urmare „p implică material q" va însemna „este fals că p este adevărat și q fals"; iar „p este material echivalent cu q" înseamnă „p și q sînt ambele adevărate sau ambele false". În felul acesta dispunem acum de toate noțiunile care apar în calculul propozițional bivalent din *Principia Mathematica*: negație, disjuncție, conjuncție, implicație materială și echivalență materială.

Vom arăta că în sistemul lui Lewis[15] pot fi demonstrate, în afara teoremelor de pînă acum, toate teoremele calculului propozițional bivalent din *Principii* (*3.5—*3.8). Urmarea acestui fapt va fi că în cadrul logicii lewisiene se pot discuta, pe de o parte, proprietățile pe care implicația strictă și implicația materială le au în comun, iar pe de altă parte, proprietățile proprii implicației materiale și care o deosebesc de cea strictă. Pe baza definiției implicației materiale, din 12.81 rezultă imediat:

14.1 $\quad p \prec q \,.\, \prec \,.\, p \supset q$

Dacă p implică q strict, atunci îl implică și material. Reciproca însă este falsă. Implicația materială este *mai largă* decît cea strictă. Concluzia ce se desprinde din această teoremă este că ori de cîte ori se poate demonstra propoziția $p \prec q$, propoziția $p \supset q$ poate fi, de asemenea, demonstrată. Orice implicație strictă poate fi înlocuită prin implicația materială corespunzătoare.

Și acum vom arăta că teoremele din *Principii* pot fi demonstrate aici:

14.2 $\quad p \supset q \,.\, = \,.\, \sim p \vee q$ $\qquad$ (*Principii*, 1.01)

Dem.

$[11.01 : \sim p/p] \quad \sim p \vee q \,.\, = \,.\, \sim [\sim (\sim p) \sim q]$

$[12.3] \qquad\qquad = \,.\, \sim (p \sim q)$

$[14.01] \qquad\qquad = \,.\, p \supset q$

[15] Este vorba de sistemul 1(S1) de care ne-am ocupat pînă acum în acest capitol. Cel ale cărui axiome sînt 11.1 — 11.7, iar regulile de inferență: substituția, inferența și adjuncția.

14.21 $pq \,.=.\, \sim(\sim p \vee \sim q)$ (*Principii*, 3.01)

Dem.

[12.11] $\sim(\sim p \vee \sim q) = \sim\cdot(\sim p \vee \sim q)$

[11.01] $= \sim\{\sim[\sim(\sim p) \sim (\sim q)]\}$

[12.3] $= pq$

În *Principia Mathematica*, 14.2 și 14.21 sînt definiții.

14.25 $p \vee (q \vee r) \,.\prec.\, q \vee (p \vee r)$

Dem.

[13.4] $p \vee (q \vee r) \,.\prec.\, (p \vee q) \vee r$ (1)

[13.41] (1) = *Q.E.D.*

14.26 $pq \,.\prec.\, r :=: p \,.\prec.\, q \supset r$

Dem.

[12.6] $pq \,.\prec.\, r :=: q \sim r \,.\prec.\, \sim p$

[12.45] $=: p \,.\prec.\, \sim(q \sim r)$

[14.01] $=: p \,.\prec.\, q \supset r$

14.27 $q \supset r \,.\prec: p \vee q \,.\supset.\, p \vee r$

Dem.

[11.1] $\sim rq \,.\prec.\, q \sim r$ (1)

[12.61 : $\sim r/p$; $q \sim r/r$] (1) $\,.\prec:.\, \sim r \,.\sim(q \sim r) :\prec.\, \sim q$ (2)

[11.1] $\sim q \sim p \,.\prec.\, \sim p \sim q$ (3)

[12.77 : $\sim r \,.\sim(q \sim r)/p$; $\sim q/q$; $\sim p/r$; $\sim p \sim q/s$]

(2) . (3) : $\prec:.\, \sim r \,.\sim(q \sim r) \,.\sim p :\prec.\, \sim p \sim q$ (4)

[12.5] (4) . = :. $\sim (q \sim r) . \sim p \sim r : \prec . \sim p \sim q$ (5)

[12.6] (5) . = :. $\sim (q \sim r) . \sim (\sim p \sim q) : \prec .$

$\sim (\sim p \sim r)$ (6)

[11.01] (6) . = :. $\sim (q \sim r) . p \vee q : \prec . p \vee r$ (7)

[14.01] (7) . = :. $q \supset r . p \vee q : \prec . p \vee r$ (8)

[14.26] (8) $= Q.E.D.$

În baza principiului 14.1, că oriunde poate fi demonstrată implicația strictă, poate fi demonstrată și implicația materială, din 13.3 rezultă

14.22 $p \vee q . \supset . p$ (*Principii*, 1.2),

din 13.21 rezultă

14.23 $q . \supset . p \vee q$ (*Principii*, 1.3),

din 13.1 rezultă

14.24 $p \vee q . \supset . q \vee p$ (*Principii*, 1.4),

din 14.25 rezultă

14.251 $p \vee (q \vee r) . \supset . q \vee (p \vee r)$ (*Principii*, 1.5),

iar din 14.27 rezultă

14.28 $q \supset r . \supset : p \vee q . \supset . p \vee r$ (*Principii*, 1.6).

Așadar, am reușit să demonstrăm toate postulatele și definițiile de la care pleacă Russell și Whitehead în construcția sistemului lor. În sistemul lor, operațiile prin care din acestea se obțineau teoremele erau substituția și inferența în raport cu implicația materială. Prima este aplicată și aici [substituția (b)]. Dar și a doua poate fi utilizată, deoarece

14.29 $p . p \supset q : \prec . q$

Dem.

[12.1] $p \sim q . \prec . p \sim q$ (1)

$[12.61 : \sim q/q;\ p \sim q/r]\quad (1)\ .\ \prec :.$

$$p\ .\ \sim (p \sim q)\ :\ \prec .\ q\quad (2)$$

$[14.01]\quad (2) = Q.E.D.$

și deci dacă p și $p \supset q$ sînt teoreme, $p.\ p \supset q$ este teoremă în baza adjuncției. Apoi, aplicînd principiul 14.29, inferăm că propoziția q este și ea o teoremă.

Cititorul se poate întreba: unde mai este atunci diferența între cele două feluri de implicații (strictă și materială) dacă amîndouă pot servi în aceeași măsură la deducția teoremelor prin aplicarea operației numită inferență? S-ar părea, într-adevăr, că, deoarece Lewis definise implicația sa într-un mod mai strict decît o făcuse Russell și deoarece nu permisese aplicarea operației de inferență decît în raport cu ea, însuși domeniul de aplicabilitate al acestei operații se restrînge în comparație cu cel al implicației russelliene. Acest lucru nu este însă adevărat.

Pentru Lewis orice implicație față de care, în sistemul bivalent din *Principia*, se putea aplica operația de inferență (cu alte cuvinte, orice implicație tautologică) este un caz în care aceasta dă naștere în mod valabil deducției. Acestea sînt, de altfel, și singurele cazuri. Ca atare, este de așteptat și chiar de dorit ca în el implicația strictă să aibă loc și deci operația de inferență să se poată aplica.

Deci orice poate fi dedus cu mijloacele din sistemul *Principiilor* poate fi dedus și cu mijloacele din sistemul de care ne ocupăm.

* 4.7. Relația de compatibilitate

Noțiunile de compatibilitate și de independență a două propoziții nu pot fi lămurite satisfăcător în termenii implicației materiale. În limbajul curent, două propoziții se numesc *compatibile* dacă, luînd pe una (oricare) dintre ele drept premisă, nu putem deduce falsitatea celeilalte drept concluzie. Adică, în limbajul implicației materiale:

$\sim (p \supset \sim q)$ sau, ceea ce e același lucru: $\sim (q \supset \sim p)$. De asemenea, două propoziții se numesc *independente* dacă nici una nu poate fi dedusă luînd pe cealaltă ca premisă: $\sim (p \supset q)$ și $\sim (q \supset p)$. Postulatele oricărei teorii, în special matematice, trebuie să fie compatibile și este de dorit să fie și independente[16]. Luînd însă noțiunea de deductibilitate ca fiind exprimată prin relația de implicație materială, *nu există două propoziții compatibile și independente!*

Într-adevăr, în baza tezei:

15.3 $\sim (p \supset q) \; . \prec . \; p \supset \sim q,$

dacă „q nu este deductibil din p", atunci „p și q sînt incompatibile", iar în baza tezei:

15.32 $\sim (p \supset \sim q) \; . \prec . \; p \supset q,$

dacă „p și q sînt compatibile", atunci „q este deductibil din p", deci p și q sînt dependente.

Mai mult chiar, nu există două propoziții independente, căci

15.4 $\sim (p \supset q) \; . \prec . \; (q \supset p),$

dacă „q nu este deductibil din p", atunci „p este deductibil din q".

În termenii implicației stricte însă, toate aceste fapte paradoxale dispar, căci analogele stricte ale teoremelor 15.3, 15.32 și 15.4

$$\sim (p \prec q) \; . \prec . \; p \prec \sim q$$

$$\sim (p \prec \sim q) \; . \prec . \; p \prec q$$

$$\sim (p \prec q) \; . \prec . \; q \prec p$$

nu pot fi demonstrate și sînt false[17].

Prin urmare, noțiunea de compatibilitate capătă un înțeles mult mai apropiat de cel obișnuit (și care a fost

[16] Vedeți *2.3.

[17] Observăm, așadar, că în teoremele 15.3, 15.32 și 15.4, pe cînd implicația principală sau afirmată este strictă, implicațiile subordonate sau neafirmate nu pot fi decît materiale, căci ele nu reprezintă inferențe propriu-zise.

menționat), luînd ca relație de deductibilitate implicația strictă. Lewis notează relația de compatibilitate *(consistency)* a două propoziții cu simbolul „o" și o definește astfel:

17.01 $p \circ q \,.=.\sim (p \prec \sim q)$

$p \circ q$ se citește „p este compatibil cu q".

În baza teoremelor 12.42 și 12.44, găsim:

$\sim (q \prec \sim p) \prec \sim (p \prec \sim q)$ sau, permutînd variabilele,

$\sim (p \prec \sim q) \prec \sim (q \prec \sim p)$.

Deci dacă p și q sînt compatibile, q și p sînt, de asemenea, compatibile și reciproc, simetrie relevată de însuși conținutul intuitiv al acestei noțiuni și care pe scurt se exprimă în:

17.21 $p \circ q \,.=.\, q \circ p$

Alte proprietăți la fel de intuitive ale acestei relații sînt:

17.1 $pq \,.\prec.\, p \circ q$

Dacă p și q sînt adevărate, ele sînt compatibile. Implicația nu este reversibilă, relația „o" neconfundîndu-se cu produsul logic.

17.12 $p \prec q \,.=.\sim (p \circ \sim q)$

Lewis[18] o compară pe aceasta cu definiția implicației materiale

14.01 $p \supset q \,.=.\sim (p \sim q)$

Spre exemplu, fie p = „trandafirii sînt verzi" și q = „zahărul este dulce". Deoarece p este fals (sau deoarece q este adevărat) $\sim (p \sim q)$ are loc în acest caz, și deci $p \supset q$ are și ea loc: „trandafirii sînt verzi" implică material „zahărul este dulce". Dar, după cum se poate vedea, „trandafirii

[18] *Symbolic Logic*, p. 154.

sînt verzi" şi „zahărul nu este dulce" nu sînt incompatibile una cu cealaltă, $\sim (p \circ \sim q)$ nu are loc şi deci $p \prec q$ nu are loc.

17.13 $\sim (p \circ \sim p)$

Orice propoziţie este incompatibilă cu negaţia sa.

17.3 $p \prec q \,.\, p \circ r : \prec .\, q \circ r$

Dacă r este compatibilă cu p, atunci este compatibilă şi cu consecinţa acesteia, q.

17.32 $p \prec r \,.\, q \prec s \,.\, p \circ q : \prec .\, r \circ s$

Dacă premisele sînt compatibile, concluziile vor fi şi ele compatibile.

Am vorbit pînă acum doar de compatibilitatea a două propoziţii. În cazul a trei propoziţii: p, q, r, afirmaţia „p, q şi r sînt toate compatibile" nu mai poate fi exprimată nici prin $p \circ (q \circ r)$, nici prin $(p \circ q) \circ r$. Căci prima înseamnă «p este compatibil cu propoziţia „q este compatibil cu r"», iar a doua înseamnă «propoziţia „p este compatibil cu q" este compatibilă cu r». Pentru a da un exemplu că aşa stau lucrurile, luăm[19]:

p = iarba este roşie

q = iarba este colorată

r = iarba este verde;

p şi q sînt evident compatibile, deci $p \circ q$ este adevărată, r fiind şi el adevărat. Cum două propoziţii adevărate sînt, în baza teoremei 17.1, compatibile, $(p \circ q) \circ r$ are loc, deşi cele trei propoziţii luate în totalitate nu sînt compatibile.

Nici relaţia $p \circ q \,.\, p \circ r \,.\, q \circ r$ nu poate exprima compatibilitatea lor. Într-adevăr, fie de pildă:

p = astăzi este luni

q = astăzi este 4 iulie

r = 5 iulie nu cade marţi.

[19] *Ibidem*, p. 155.

Oricare două din cele trei propoziții sînt compatibile, deci $p \circ q \,.\, p \circ r \,.\, q \circ r$ are loc. Luate *in toto*, ele nu mai sînt compatibile.

Lewis conchide că relația de compatibilitate a trei propoziții p, q și r echivalează cu «p este compatibilă cu propoziția „q și r sînt adevărate“» : $p \,.\circ.\, q\, r$. Simetria ei intuitivă rezultă din teorema:

17.4 $\quad p \,.\circ.\, q\, r :=: q \,.\circ.\, pr :=: r \,.\circ.\, pq$

Vom considera acum un caz particular de compatibilitate: compatibilitatea unei propoziții cu ea însăși *(self consistency)* și pe care o vom numi simplu *compatibilitate*.

17.52 $\quad p \prec q \,.\, p \prec \sim q : \prec \,.\, \sim (p \circ p)$

O premisă din care se pot deduce două concluzii contradictorii este incompatibilă (cu ea însăși).

17.53 $\quad p \prec q \,.\, p \circ p : \prec \,.\, q \circ q$

Dacă o propoziție este compatibilă, orice propoziție dedusă din ea este tot compatibilă. Avem și reciproca:

17.54 $\quad p. \prec q \,.\, \sim (q \circ q) : \prec \,.\, \sim (p \circ p)$,

adică dacă o propoziție este incompatibilă, propoziția din care aceasta a fost dedusă este tot incompatibilă.

17.55 $\quad p \circ p \,.\, \sim (q \circ q) : \prec \,.\, \sim (p \prec q)$

Dacă două propoziții sînt, una compatibilă, cealaltă incompatibilă, atunci cea de-a doua nu poate fi dedusă din prima.

17.56 $\quad p \prec q \,.\, p \circ p : \prec \,.\, p \circ q$

Concluzia este compatibilă cu premisa dacă aceasta din urmă este compatibilă. Condiția de compatibilitate a premisei este necesară; fără ea teorema nu mai poate fi stabilită. O dată cu 17.56 au loc (ca și pentru 17.53) toate variantele sale:

17.57 $\quad p \prec q \,.\, \sim (p \circ q) : \prec \,.\, \sim (p \circ p)$

17.58 $\quad p \circ p \,.\, \sim (p \circ q) : \prec \,.\, \sim (p \prec q)$

Următoarele teoreme stabilesc legături evidente între adevăr și compatibilitate.

17.6 $p \,.\prec.\, p \circ p$

Orice propoziție adevărată este compatibilă.

17.61 $\sim (p \circ p) \,.\prec.\, \sim p$

Orice propoziție incompatibilă este falsă.

* 4.8. Funcții modale

Deși se poate demonstra ca teoremă echivalența

18.1 $\Diamond p \,.=.\, p \circ p .=.\, \sim (p \prec \sim p)$,

Lewis observă că ea ar fi putut servi tot atît de bine și ca definiție pentru noțiunea de posibilitate (evident cînd nu ea, ci compatibilitatea sau implicația strictă ar fi fost luate drept noțiuni primitive), căci proprietățile posibilității în sistem sînt exact cele ce decurg din această echivalență. Astfel $\Diamond p$ înseamnă „p este compatibil (cu sine)" sau „p nu implică propria sa negație".

Expresia $\sim (\Diamond p)$, pe care o vom scrie $\sim \Diamond p$, înseamnă: „este fals că p este posibil" sau „p este imposibil" sau „p nu este compatibil (cu sine)" sau „p implică propria sa negație"

18.12 $\sim \Diamond p \,.=.\, \sim (p \circ p) \,.=.\, p \prec \sim p$

Expresia $\Diamond (\sim p)$ o vom scrie $\Diamond \sim p$ și înseamnă „este posibil ca p să fie fals" sau „p nu este necesar adevărat"[20] sau, ținînd seama de echivalențele

18.13 $\Diamond \sim p \,.=.\, \sim p \circ \sim p \,.=.\, \sim (\sim p \prec p)$

„negația lui p este incompatibilă" sau „adevărul lui p nu poate fi dedus din propria sa negație".

[20] Deoarece $\Diamond \sim p$ este echivalentă, în baza principiului dublei negații (12.3), cu $\sim (\sim \Diamond \sim p)$, iar $\sim \Diamond \sim p$ înseamnă „p este necesar adevărat".

Expresia $\sim [\Diamond (\sim p)]$, notată $\sim \Diamond \sim p$[21], înseamnă „este imposibil ca p să fie fals", deci „p este necesar adevărat" sau, cum

18.14 $\quad \sim \Diamond \sim p \;.=.\; \sim (\sim p \circ \sim p) \;.=.\; \sim p \prec p,$

„negația lui p este incompatibilă" sau „adevărul lui p poate fi dedus din propria sa negație".

Echivalențele 18.1—18.14 pot fi comparate cu următoarele:

18.1 cu $\quad p \;.=.\; p \sim (\sim p) \;.=.\; \sim (p \supset \sim p)$

18.12 cu $\sim p \;.=.\; \sim [p \sim (\sim p)] \;.=.\; p \supset \sim p$

18.13 cu $\sim p \;.=.\; \sim p \sim p \;.=.\; \sim (\sim p \supset p)$

18.14 cu $\quad p \;.=.\; \sim (\sim p \sim p) \;.=.\; \sim p \supset p$

Așadar, înlocuind relațiile stricte „$\circ$" și „$\prec$", respectiv cu relațiile materiale de produs logic și implicație materială, se șterge distincția dintre *posibil*, *adevărat* și *necesar* și dintre *imposibil*, *fals* și *posibil fals*, logica devenind bivalentă.

Pentru a lămuri sensul intuitiv al noțiunilor de „posibil", „imposibil" și „necesar" în accepția lui Lewis, vom face odată cu el distincția dintre un sens *relativ* și unul *absolut* al acestora[22].

Sensul relativ are în vedere legătura pe care propoziția, sau mai bine zis faptul exprimat de ea, o are cu o anumită stare de lucruri ca: date inițiale, cunoștințele noastre la un moment dat etc. Posibil înseamnă atunci compatibil cu această stare de lucruri, imposibil înseamnă incompatibil cu ea, iar necesar — implicat de însăși această stare de lucruri.

Sensul absolut se referă la propoziție (sau conținutul ei) luată în ea însăși, adică în raportul pe care îl are cu ea

---

[21] Ca prescurtare a notației „$\sim \Diamond \sim$", literatura de specialitate a introdus simbolul „$\Box$", numit și simbolul necesității. În aceste condiții, $\Box p$ se va citi „p este necesar". Ceva mai încolo vom utiliza sistematic această notație.

[22] *Symbolic Logic*, p. 161.

însăși sau cu negația sa, totul reieșind din simpla analiză logică a acestei propoziții.

Pentru a face o comparație între cele două înțelesuri, să notăm prin Q starea de lucruri la care ne refeream mai sus. Atunci:

p este	în sens relativ	în sens absolut
posibil	$p \circ Q$	$p \circ p$
imposibil	$\sim (p \circ Q)$	$\sim (p \circ p)$
necesar	$\sim (\sim p \circ p)$ sau $Q \prec p$	$\sim (\sim p \circ \sim p)$ sau $\sim p \prec p$

Sensul relativ al posibilității este mai larg decît cel absolut, implicîndu-l. Invers stă cazul cu imposibilitatea și necesitatea care, deoarece se definesc prin negarea posibilității, $\sim \Diamond$, și respectiv posibil falsului, $\sim \Diamond \sim$, sensurile lor relative vor fi mai restrînse decît cele absolute corespunzătoare. Implicația, definită de Lewis ca o imposibilitate logică, va fi și ea deci valabilă într-un număr mai restrîns de cazuri decît noțiunea relativă corespunzătoare.

Este evident faptul că Lewis nu tratează modalitățile decît în sensul numit de el absolut. Am văzut legăturile acestora cu modalitățile relative. Să urmărim acum legăturile lor între ele.

Utilizînd echivalența 18.1, putem înlocui în 17.6 expresia $p \circ p$ cu $\Diamond p$ și obținem:

18.4 $p \prec \Diamond p$

adevărul implică posibilul. La fel, din 18.1 și 17.61 obținem:

18.41 $\sim \Diamond p \prec \sim p$

imposibilul implică falsul.

18.42 $\sim \Diamond \sim p \prec p$

Dem.

[18.41] $\sim \Diamond \sim p \prec \sim (\sim p)$

necesarul implică adevărul.

18.43 $\sim \Diamond \sim p \prec \Diamond p$

Dem.

[11.6] (18.42) . (18.4) : $\prec$ *Q.E.D.*

necesarul implică posibilul.

18.44 $\sim p \prec \Diamond \sim p$

Dem.

[18.4 : $\sim p/p$] *Q.E.D.*

falsul implică posibil falsul.

18.45 $\sim \Diamond p \prec \Diamond \sim p$

Dem.

[11.6] (18.41) . (18.44) : $\prec$ *Q.E.D.*

imposibilul implică posibil falsul.

Modalitățile afirmative (posibilitatea și necesitatea) au proprietatea că se transmit de la antecedentul unei implicații la consecventul ei:

18.51 $p \prec q \,.\, \Diamond p :\prec .\, \Diamond q$

Dacă antecedentul este posibil, consecventul este posibil.

18.53 $p \prec q \,.\, \sim \Diamond \sim p :\prec .\, \sim \Diamond \sim q$

Dacă antecedentul este necesar, consecventul este necesar[23].

Așadar, ori de cîte ori o propoziție poate fi demonstrată ca posibilă (necesară), orice propoziție implicată strict de ea este tot posibilă (respectiv necesară). Acest fapt îl vom folosi la momentul potrivit (*4.13).

Cu toate acestea, implicația $p \prec q \,.\prec .\, \Diamond p \prec \Diamond q$

[23] Scolasticii cunoșteau foarte bine aceste relații și încă multe altele pe care le înglobau în tratatele lor sub numele de *Teoria consecințelor* (**A. Dumitriu,** *Istoria logicii*, cap. XXII, § 22.5, în care cele două teoreme 18.5 și 18.53 apar sub forma regulilor M_1 și M_4).

(respectiv $p \prec q \,.\prec.\, \sim \Diamond \sim p \prec \sim \Diamond \sim q$)

nu poate fi dedusă utilizînd doar postulatele 11.1 — 11.7. După cum vom vedea însă, ea poate fi adăugată ca postulat suplimentar, cu consecinţe importante (*4.10).

Modalităţile negative — imposibilitatea şi posibil falsul — se transmit invers, de la consecventul implicaţiei la antecedentul ei. Aşa cum, datorită transpoziţiei (12.43), dacă $p \prec q$ şi $\sim q$, atunci $\sim p$.

18.5 $p \prec q \,.\sim \Diamond q : \prec .\sim \Diamond p$

Dacă consecventul este imposibil, atunci şi antecedentul este imposibil. Altfel spus, o propoziţie care implică ceva imposibil este, ea însăşi, imposibilă.

18.52 $p \prec q \,.\Diamond \sim q : \prec .\Diamond \sim p$

Dacă consecventul este în mod posibil fals, antecedentul va fi, de asemenea, în mod posibil fals.

* 4.9. Completarea sistemului 1. Sistemul 2

Aşa cum am observat şi în discuţia acestor teoreme, sistemul tratat de noi pînă acum (S1) suferă de anumite lipsuri. El este incomplet, în sensul că anumite principii de logică importante nu pot fi demonstrate ca teoreme în el (rămîn, aşadar, în acest cadru, false)[24], sau nu pot fi demonstrate într-o formă genuină. Ce trebuie să înţelegem prin această ultimă afirmaţie?

[24] Completitudinea, ca proprietate a unui sistem formal, a fost menţionată în *2.5.3. Putem preciza această noţiune în felul următor. Dat fiind un sistem formal, care în particular poate fi un calcul propoziţional, am văzut ce înţelegem printr-un *model* al său (*2.5.1). Ei bine, dat fiind un astfel de model, sistemul respectiv se numeşte complet dacă orice enunţ adevărat al mode-

Există o serie de teoreme în sistemul 1 ce pot fi caracterizate astfel[25]:

— Sînt de forma $p \,.\, T : \prec \,.\, q$

unde T desemnează o anumită teoremă din sistem și conține modalități (în mod implicit sau explicit); de exemplu $p \prec p$, dar nu $p \supset p$.

— Propoziția $p \,.\, T : \prec \,.\, q$ este demonstrabilă în sistem (este teoremă).

— Propoziția $p \prec q$ nu este demonstrabilă (nu este teoremă).

Datorită formei lor, ele poartă numele de *T-teoreme* sau *T-principii*[26]. Vom da un exemplu:

16.1 $\quad p \prec q \,.\, T : \prec : pr \,.\prec\,.\, qr$

unde: $T = : qr \,.\prec\,.\, qr$, adică teorema este de fapt

$$p \prec q : qr \,.\prec\,.\, qr :. \prec : pr \,.\prec\,.\, qr$$

Demonstrație:

[12.77 : qr/s] $\quad Q.E.D.$

Pe de altă parte însă se poate demonstra că propoziția 16.1 în forma genuină, adică fără T,

$$p \prec q \,.\prec : pr \,.\prec\,.\, qr,$$

deși valabilă din punct de vedere intuitiv, nu este o teoremă (nu poate fi dedusă *numai* din postulatele 11.1—11.7). Pentru a o putea deduce, atît pe ea cît și pe altele la fel de evidente, Lewis se vede nevoit să introducă un al optulea postulat, și anume:

19.01 $\quad \Diamond (pq) \prec \Diamond p$

---

lului este derivabil în sistem. (Reciproca acestei proprietăți este valabilă prin însăși definiția modelului). Tocmai în acest sens considerăm sistemul 1 ca incomplet, căci anumite principii valabile în modelul la care ne gîndim (logica obișnuită) nu pot fi derivate în interiorul său.

[25] **R. Feys**, *op. cit.*, p. 61.

[26] *Symbolic Logic*, p. 147 și urm.

Aceasta se numește *postulatul compatibilității*, căci

$$\Diamond (pq) \,.=.\sim\sim\Diamond [p\sim(\sim q)] \,.=.\sim (p \prec \sim q) \,. =. p \circ q,$$

iar $p .=. \Diamond (pp) .=. p \circ p$

Deci 19.01 se mai poate pune sub forma:

19.01* $p \circ q \,.\prec. p \circ p$

Dacă p și q sînt compatibile, atunci p este compatibil (cu sine).

Să observăm că 19.01 putea fi demonstrat sub forma unui T-principiu pornind de la postulatele 11.1—11.7 (în sistemul 1). Într-adevăr

$[18.51 : pq/p;\ p/q]$ $pq \,.\prec. p : \Diamond (pq) :.\prec.\Diamond p$

unde: $T =: pq \,.\prec. p$ este postulatul 11.2.

Noul sistem formal astfel obținut, și numit de Lewis *sistemul* 2 (S2), cuprinde pe lîngă teoremele sistemului 1 toate T-teoremele în forma lor genuină (fără T). Introducerea lui 19.01 se dovedește, așadar, fructuoasă. Totuși aduce cu sine și consecințe ce pot fi privite ca paradoxale:

19.74 $\sim\Diamond p \,.\prec. p \prec q$

Demonstrație:

$[12.43,\ 19.11]$ $\sim (p \circ p) \prec \sim (p \circ q)$ (1)

$[(1) : \sim q/q]$ $\sim (p \circ p) \prec \sim (p \circ \sim q)$ (2)

$[18.12,\ 17.12]$ $(2) = Q.E.D.$

O propoziție imposibilă sau contradictorie implică orice propoziție.

19.75 $\sim\Diamond\sim p \,.\prec. q \prec p$

Demonstrație:

$[19.74 : \sim p/p;\ \sim q/q]$ $\sim\Diamond\sim p \,.\prec.\sim p \prec \sim q$ (1)

$[12.44]$ $(1) = Q.E.D.$

O propoziţie necesară este implicată de orice propoziţie.

Ele seamănă doar cu paradoxele implicaţiei materiale $\sim p \supset . p \supset q$ şi respectiv $p \supset . q \supset p$, căci, de fapt, reprezintă adevăruri fundamentale ale deducţiei[27], aşa cum vom vedea în *4.13.

* 4.10. Modalităţi complexe

Discutînd sistemele modale ale lui Lewis, filozoful O. Becker a făcut următoarea observaţie evidentă[28]: pe lîngă cele 6 modalităţi simple considerate de Lewis (adevărul, falsul, posibilul, imposibilul, posibil falsul şi necesarul), nimic nu ne împiedică să considerăm şi modalităţi suprapuse sau complexe, ca de exemplu:
„$\sim \Diamond \sim \sim \Diamond$", care înseamnă „este necesar ca să fie imposibil".

E drept că unele din acestea se reduc, în baza echivalenţelor demonstrate pînă acum, la altele mai simple. De pildă cea din exemplul nostru se reduce, în baza legii dublei negaţii (12.3), la:
„$\sim \Diamond \Diamond$", adică „este imposibil să fie posibil".

Totuşi McKinsey a demonstrat că în S2 (deci şi în S1) există *o infinitate* de asemenea modalităţi complexe ireductibile[29].

Şi anume, a arătat el, toate modalităţile de forma $\Diamond^n$ (adică $\Diamond \Diamond \ldots \Diamond$ de n ori) sînt ireductibile.

În acest scop să *interpretăm* propoziţiile p, q, r etc. ca reprezentînd mulţimi de numere naturale; negaţia unei propoziţii, $\sim p$, ca reprezentînd mulţimea formată din toate numerele naturale care nu intră în mulţimea p (complementara mulţimii p); produsul logic a două propoziţii, pq, ca reprezentînd mulţimea numerelor

---

[27] *Ibidem*, p. 248 şi urm.

[28] **O Becker**, *Zur Logik der Modalitäten*, în „Jahrbuch für Philosophische und Phenomenologische Forschung", 11 (1930), pp. 496—548.

[29] **J. C. C. McKinsey**, *Proof that there are infinitely many modalities in Lewis's system S2*, în „Journal of Symbolic Logic", V (1940), pp. 110—112.

care intră atît în mulțimea p cît și în mulțimea q (intersecția mulțimilor p și q); posibilitatea lui p, $\Diamond p$ ca reprezentînd mulțimea atît a numerelor din p cît și a succesorilor lor imediați (reuniunea mulțimii p cu mulțimea succesorilor numerelor din p).

Să considerăm acum o propoziție din logica lui Lewis, spre exemplu postulatul

11.3 $p \,.\prec.\, pp$

El poate fi scris doar cu ajutorul negației, produsului logic și posibilității

$$\sim \Diamond (\sim p \,.\, pp)$$

Fie atunci p mulțimea formată doar din numărul 0 adică $\{0\}$. Produsul pp va fi evident, în baza celor spuse mai sus, tot $\{0\}$, iar $\sim p$ va fi mulțimea numerelor naturale mai puțin 0 adică $\{1,2...\}$.

Expresia $\sim p \,.\, pp$ va fi mulțimea numerelor naturale care intră atît în mulțimea $\{0\}$ cît și în mulțimea $\{1,2...\}$. Evident, nici un număr nu poate face parte din această mulțime. Ea este mulțimea fără nici un număr (vidă). Neavînd elemente, nu există nici succesori ai elementelor.

Deci mulțimea $\Diamond (\sim p.\, pp)$ va fi tot mulțimea fără nici un număr. Dar atunci $\sim \Diamond (\sim p \,.\, pp)$, formată din toate numerele naturale cu excepția celor din $\Diamond (\sim p.\, pp)$, va fi formată din toate numerele naturale fără excepție. Această mulțime corespunde postulatului 11.3 nu numai cînd luăm p drept mulțimea $\{0\}$, ci drept *orice* mulțime de numere naturale (postulatul are o proprietate analogă cu cea de a fi o tautologie din calculul propozițional bivalent — *3.14). Toate postulatele au această proprietate. În plus, operațiile prin care din ele derivăm teoremele (substituția, adjuncția și inferența) „păstrează" proprietatea. Adică toate teoremele „moștenesc" de la postulate această proprietate.

Fără să insistăm, facem doar observația că o propoziție de forma

$$p = q$$

va avea proprietatea în cauză dacă și numai dacă mulțimile p și q sînt egale în sensul obișnuit (adică au aceleași elemente).

Revenind la problema pusă, pentru a arăta că modalitățile $\Diamond^n$ sînt toate ireductibile este suficient să arătăm că o teoremă de tipul

$$\Diamond^n p = \Diamond^m p$$

(teoremă de reductibilitate) nu poate avea loc decît dacă $n = m$. Sau, apelînd la „interpretarea" descrisă mai sus, că pentru o mulțime p de numere naturale convenabil aleasă, cele două mulțimi corespunzătoare $\Diamond^n p$ și $\Diamond^m p$ nu pot fi egale decît atunci cînd $n = m$.

Să luăm drept p mulțimea $\{0\}$. Prin urmare

$\Diamond p = \{0,1\}$, $\Diamond \Diamond p = \{0,1,2\}$ etc.

$\Diamond^n p$ și $\Diamond^m p$ vor fi atunci, respectiv, $\{0,1,2,...,n\}$ și $\{0,1,2,.., m\}$ egalitatea putînd avea loc doar cînd $n = m$.

Așadar, prin combinație între ele, modalitățile pot da mereu combinații ireductibile. Sistemul modal al lui Lewis este deschis. El prezintă prin aceasta o serioasă lacună.

Este de remarcat că Becker, care făcea aceste observații, nu se referea la sistemul 2, considerat pînă acum, ci la unul mai cuprinzător decît el și numit pentru aceasta de Lewis *sistemul* 3 (S3). Propus în *A Survey of Symbolic Logic* (vezi paragraful *4.4), el poate fi obținut dacă la postulatele sistemului 1 (11.1—11.7) adăugăm postulatul

8. $p \prec q \;.\prec.\; \Diamond p \prec \Diamond q$[30]

Acesta s-a dovedit mai „tare" ca 19.01, care poate fi dedus din el (pe cînd invers nu).

În S3, americanul W.T. Parry a dovedit că sînt doar 42 de modalități complexe ireductibile[31]. Ce-i drept, cam multe pentru a le da o interpretare intuitivă, dar totuși în număr finit. (Pentru matematicieni, finitul, oricît de mare ar fi, este la fel de contrastant cu infinitul. De aceea ei nu disting între un finit mic și un finit mare).

La vremea cînd și-a scris studiul său (1930), Becker nu cunoștea faptul. Considerînd, probabil, că aceste modalități sînt în număr infinit, el și-a propus să le reducă la unul finit prin adăugarea de noi postulate sistemului 3. Reducerile astfel obținute conduc la un număr mult mai mic de modalități fundamentale, ușurînd înțelegerea lor intuitivă și făcînd interesante sistemele respective, motiv pentru care le vom analiza în cele ce urmează.

---

[30] **R. Feys**, *op. cit.*, p. 79.

[31] **W. T. Parry**, *Modalities in the Survey system of strict implication*, în „Journal of Symbolic Logic", IV (1939), pp. 137—154.

* 4.11. Reducerea modalităţilor la 14. Sistemul 4

Începînd cu acest paragraf, vom întrebuinţa sistematic simbolul „$\Box$" pentru desemnarea modalităţii „necesar", înlocuind grupul de semne „$\sim \Diamond \sim$". Expresia „$\Box\, p$" se va citi, aşadar, „p este necesar". Între cele două simboluri $\Box$ şi $\Diamond$ există o legătură fundamentală şi care se numeşte „dualitate" (analogă celei care există între cei doi cuantificatori — universal şi particular — ai calculului cu funcţii), legătură pe care o vom concretiza în „regula de dualitate".

Am văzut că din punct de vedere formal o modalitate se prezintă ca un şir finit de simboluri $\sim$, $\Diamond$ şi $\Box$, pe care îl notăm pe scurt prin M. Din definiţia simbolului $\Box$,

$$\Box = \sim \Diamond \sim,$$

şi utilizînd legea dublei negaţii, rezultă imediat următoarele echivalenţe

$$\Box \sim p \,.=.\, \sim \Diamond \sim \sim p \,.=.\, \sim \Diamond p$$

$$\Diamond \sim p \,.=.\, \sim \sim \Diamond \sim p \,.=.\, \sim \Box p$$

Aşadar negaţia, trecînd peste semnele $\Box$ şi $\Diamond$, le schimbă pe unul în celălalt; dacă negaţia trece peste alte semne de negaţie, le lasă evident neschimbate.

Regula de dualitate. Fie M_1 şi M_2 două modalităţi, iar M_1' şi M_2' modalităţile obţinute respectiv din M_1 şi M_2 prin înlocuirea semnelor $\Box$ şi $\Diamond$ între ele (de exemplu dacă M_1 este „$\Box \sim \Diamond$" atunci M_1' este „$\Diamond \sim \Box$"). Atunci, dacă $M_1 p \prec M_2 p$ este o teoremă, $M_2' p \prec M_1' p$ este tot o teoremă.

Demonstraţie:

Datorită efectului trecerii semnului de negaţie peste semnele $\Box$, $\Diamond$, $\sim$, observat mai sus, rezultă că

$$M_1 \sim p = \sim M_1' p \tag{1}$$

$$[(1) : \sim p/p] \quad M_1 \sim \sim p = \sim M_1' \sim p \tag{2}$$

$$[(2), 12.3] \quad M_1 p = \sim M_1' \sim p \tag{3}$$

În mod perfect analog putem găsi și echivalența

$$M_2 p = \sim M_2' \sim p \tag{4}$$

Dar am presupus că are loc

$$M_1 p \prec M_2 p \tag{5}$$

$[(3), (4), (5)] \quad \sim M_1' \sim p \prec \sim M_2' \sim p \tag{6}$

$[(6) : \sim p/p] \quad \sim M_1' \sim \sim p \prec \sim M_2' \sim \sim p \tag{7}$

$[(7), 12.3] \quad \sim M_1' p \prec \sim M_2' p \tag{8}$

[(8), 12.41] $M_2' p \prec M_1' p$, deci ceea ce trebuia demonstrat.

Și acum să revenim la cercetările lui Becker. Urmărind reducerea modalităților complexe, el introduce noi postulate. Inițial acestea au fost adăugate la cele opt axiome ale sistemului 3. Ulterior, arătîndu-se că în acest fel a opta putea fi dedusă din celelalte, s-a renunțat la ea. Așadar, vom adăuga, pentru obținerea *sistemului* 4, primelor șapte postulate, 11.1—11.7, următorul:

9. $\Box p \prec \Box \Box p$

Necesitatea implică necesitatea necesității. Care este sensul introducerii lui?

Ne propusesem reducerea modalităților suprapuse la unele mai simple. Dar cele de forma $\Box^n$ sau $\Diamond^n$ pot fi reduse la $\Box$, respectiv $\Diamond$, dacă dispunem în sistem de echivalențele

10. $\Box^n p = \Box p$

11. $\Diamond^n p = \Diamond p$

Acestea însă pot fi deduse din aproape în aproape din

12. $\Box^2 p = \Box p$

(prin substituția lui p cu $\Box p$ obținem $\Box^3 p = \Box^2 p = \Box p$ ș.a.m.d.) și respectiv

13. $\Diamond^2 p = \Diamond p$

Să observăm că, deoarece fiecare dintre ele este duala celeilalte (conține simbolul $\Box$ unde cealaltă conține simbolul $\Diamond$ sau invers), dacă una are loc, cealaltă, în baza regulei stabilite, are și ea loc. Dar echivalența 12 se compune din următoarele două implicații stricte:

12′. $\Box^2 p \prec \Box p$

12″. $\Box p \prec \Box^2 p$

Formula 12′ afirmă că din necesitatea propoziției $\Box p$ se deduce adevărul ei și ca atare este o aplicare a teoremei 18.42. Reciproca însă, 12″, nu putea fi pînă acum demonstrată. Luînd-o ca axiomă, 12 și deci 10 devin teoreme. Apoi, prin dualitate, 13 și 11 pot fi, de asemenea, demonstrate, $\Box^n$ și $\Diamond^n$ reducînd-se la $\Box$ și respectiv $\Diamond$.

Din axioma 9 și din consecința ei 8 rezultă încă cîteva teoreme importante pentru reducerea modalităților.

14. $p \prec q \,.\prec.\, \Box p \prec \Box q$

Demonstrație:

$[8 : \sim q/p;\ \sim p/q]\quad \sim q \prec \sim p \,.\prec.\, \Diamond \sim q \prec \Diamond \sim p$ (1)

$[12.43,\ (1),\ 11.6]\quad p \prec q \,.\prec.\, \Diamond \sim q \prec \Diamond \sim p$ (2)

$[12.43 : \Diamond \sim q/p;\ \Diamond \sim p/q]\quad \Diamond \sim q \prec \Diamond \sim p \,.\prec.$

$\sim \Diamond \sim p \prec \sim \Diamond \sim q$ (3)

$[11.6]\quad (2) \,.\, (3) :\prec Q.E.D.$

15. $\Box p \prec \Box \Diamond \Box p$

Demonstrație:

$[18.43 : \Box p/p]\quad \Box^2 p \prec \Diamond \Box p$ (1)

$[14 : \Box^2 p/p;\ \Diamond \Box p/q]\quad (1) \,.\prec.\, \Box^3 p \prec \Box \Diamond \Box p$ (2)

$[(2),\ 10]\quad Q.E.D.$

Din 15 prin regula de dualitate rezultă:

16. $\Diamond \Box \Diamond p \prec \Diamond p$

17′. $\Box \Diamond p \prec (\Box \Diamond)^2 p$

Dem.

$[15 : \Diamond p/p]$ $Q.E.D.$

17″. $(\Box \Diamond)^2 p \prec \Box \Diamond p$

Dem.

$[14 : \Diamond \Box \Diamond p/p ; \Diamond p/q]$ $16 \prec Q.E.D.$

Implicațiile 17′ și 17″ dau echivalența

17. $(\Box \Diamond)^2 p = \Box \Diamond p$

și prin dualitate

18. $(\Diamond \Box)^2 p = \Diamond \Box p$

Din 17 și 18 rezultă din aproape în aproape (cum rezultă din 12 și 13)

19. $(\Box \Diamond)^n p = \Box \Diamond p$

20. $(\Diamond \Box)^n p = \Diamond \Box p$

Utilizînd acum 10, 11, 19 și 20, sîntem în măsură să reducem toate modalitățile complexe la 14 fundamentale. Dar să procedăm sistematic.

Dacă modalitatea constă într-un simplu șir de semne $\sim$ (spunem că ea este *improprie*), aplicînd de cîte ori este nevoie legea dublei negații, fie că ajungem la propoziția simplă p (cînd numărul semnelor $\sim$ este par):

$$(\sim)^{2n} p = p,$$

fie că ajungem la negația sa $\sim p$ (cînd numărul lor este impar):

$$(\sim)^{2n+1} p = (\sim)^{2n} \sim p = \sim p$$

Așadar, modalitățile improprii se reduc la două fundamentale: adevărul „p“ și falsul „$\sim p$“.

Interesant este cazul în care modalitatea este *proprie*, adică în care apar efectiv simbolurile $\Box$ sau $\Diamond$. Cum am observat, putem trece atunci toate negațiile din modali-

tate la dreapta ei (lîngă p), ținînd seama de regulile amintite (vezi p. 128). Aplicăm apoi legea dublei negații, astfel încît orice modalitate proprie poate fi adusă fie la forma Mp (cînd conține un număr par de semne $\sim$), fie la forma $M \sim p$ (cînd numărul de semne $\sim$ este impar). În primul caz ea se numește *afirmativă*, în al doilea, *negativă*[32].

Să cercetăm numărul modalităților fundamentale (ireductibile) afirmative. Ele pot fi împărțite la rîndul lor în două tipuri[33]:

— tipul A: cele care încep cu simbolul $\Box$

— tipul B: cele care încep cu simbolul $\Diamond$

Cum orice succesiune de semne $\Box$ poate fi redusă, în baza teoremei 10, la unul singur și orice succesiune de semne $\Diamond$ poate fi redusă, în baza teoremei 11, la unul singur, orice modalitate de tipul A poate fi adusă fie la forma

$(\Box \Diamond)^n \Box$ dacă ultimul ei semn este $\Box$,

fie la forma

$(\Box \Diamond)^n$ dacă ultimul ei semn este $\Diamond$.

Apoi, prin aplicarea teoremei 19, modalitățile de prima formă se reduc toate la $\Box \Diamond \Box$, iar cele de a doua formă la $\Box \Diamond$. Modalitățile care nu conțin de loc semnul $\Diamond$ se reduc evident, în baza teoremei 10, la $\Box$. Prin urmare toate modalitățile ireductibile afirmative de tipul A sînt

$$\Box \Diamond \Box \ , \ \Box \Diamond \ , \ \Box$$

Înlocuind în raționamentul de mai sus pe $\Box$ cu $\Diamond$, pe $\Diamond$ cu $\Box$, iar teoremele 10, 11 și 19 prin dualele lor, respectiv 11, 10 și 20 (sau, cum se spune, raționînd „dual"), conchidem că toate modalitățile ireductibile afirmative de tipul B sînt:

$$\Diamond \Box \Diamond \ , \ \Diamond \Box \ , \ \Diamond$$

[32] **R. Feys**, *op. cit.*, § 30.6.
[33] *Ibidem*, p. 85.

E ușor de observat că fiecărei modalități afirmative de tipul A îi corespunde una negativă, prin adăugarea unei negații la sfîrșit. La fel și pentru cele de tipul B. Alte modalități negative ireductibile evident nu mai pot fi. Deci în total 3 + 3 afirmative, 3 + 3 negative și două improprii = 14 *modalități fundamentale*.

Între cele șase modalități afirmative (ca și între cele șase negative) subzistă niște serii liniare de implicații stricte, și anume:

$$\Box p \prec \Box \Diamond \Box p \prec \Diamond \Box p \prec \Diamond \Box \Diamond p \prec \Diamond p$$

$$\Box p \prec \Box \Diamond \Box p \prec \Box \Diamond p \prec \Diamond \Box \Diamond p \prec \Diamond p$$

Aceste relații pot fi scrise în schemă astfel, întrebuințînd săgețile în locul semnului „$\prec$“:

$$\Box p \rightarrow \Box \Diamond \Box p \begin{matrix} \nearrow \Diamond \Box p \searrow \\ \searrow \Box \Diamond p \nearrow \end{matrix} \Diamond \Box \Diamond p \rightarrow \Diamond p$$

Cele șase implicații stricte care au loc pot fi deduse imediat, pornind de la teoremele demonstrate pînă acum. W.T. Parry a arătat că altele în afara acestora nu au loc.

Oskar Becker interpretează fenomenologic modalitățile la care a ajuns. Astfel, echivalențele 12 și 13 (sau 10 și 11) conduc evident la faptul că «iterația modalității „necesar“ (sau „posibil“), așadar a modalităților afirmative, nu are nici un efect, nu oferă nimic». Ce concluzie trage de aici Becker? Fenomenologic, acest rezultat trebuie interpretat în sensul că *necesitatea este o modalitate absolută*, ea nu mai suferă o gradație și are, din cauza aceasta, un caracter *ideal*[34].

Teza aceasta este în legătură cu deosebirea pe care o face Husserl între *aprioricul* formal și contingent[35]. Necesitatea formală este, în ordine, superioară necesității materiale. Necesitatea formală se satisface singură, aduce cu sine propria ei necesitate, pe cînd necesitatea materială trebuie privită ca o existență de fapt *(Tatsache)*.

---

[34] **O. Becker,** *op. cit.*, p. 518.

[35] **E. Husserl,** *Formale und transzendentale Logik*, Halle, 1929.

Becker merge mai departe și, deși este de acord că necesitatea materială este un fapt esențial *(Wesentatsache)*, o numește, paradoxal, un „aprioric contingent".

Prin teza $\Box p \prec \Box \Box p$ se exclud din logica formală astfel de fapte esențiale, rămînînd numai la „aprioricul necesar".

La fel se petrec lucrurile și cu posibilitatea. Prin ea trebuie să înțelegem iarăși o modalitate ideală sau „formală", adică o modalitate absolută — ca și necesitatea — care nu este capabilă de gradare, de „slăbire" *(Abschwächung)*[36].

* 4.12. Reducerea modalităţilor la 6. Sistemul 5

Becker nu se oprește aici cu studiul reducerii modalităților. Am văzut că în sistemul 4 apăreau încă modalități suprapuse, și anume (considerînd doar pe cele afirmative):

— două cu cîte trei semne de modalitate (de gradul 3)

$$\Box \Diamond \Box \quad \text{și} \quad \Diamond \Box \Diamond$$

și două cu cîte două semne de modalitate (de gradul 2)

$$\Box \Diamond \quad \text{și} \quad \Diamond \Box$$

Să le considerăm pe acestea din urmă. Dacă ele s-ar putea reduce la modalități de gradul 1, atunci apare evident faptul că toate s-ar reduce la modalități de gradul 1. Este ceea ce face și Becker. Iată cum:

Între fiecare dintre cele două modalități de gradul 2 și modalitățile de gradul 1 ($\Box$ și $\Diamond$) există implicațiile:

$$\Box \Diamond p \prec \Diamond p$$

și duala sa

$$\Box p \prec \Diamond \Box p$$

[36] **O. Becker,** *op. cit.*, p. 519. Aici s-a avut în vedere aspectul logic-formal al concepției lui O. Becker și nu implicațiile ei filozofice, care necesită un alt cadru de discuție.

ce decurg din legile binecunoscute „necesarul implică adevărul" (18.42) și „adevărul implică posibilul" (18.4).

Reciprocele acestor implicații nu pot fi demonstrate. (Dacă cel puțin una ar fi demonstrabilă, atunci ar fi și cealaltă, în baza regulei de dualitate.) Dar dacă ele ar avea loc, atunci echivalențele corespunzătoare au, de asemenea, loc și deci toate modalitățile complexe se reduc la cele simple. Nu ne rămîne decît să le luăm drept axiome (datorită dualității este suficientă una singură). Este ceea ce face și Becker, care adaugă sistemului 4 postulatul

21. $\Diamond p \prec \Box \Diamond p$

Din el și din prima implicație de mai sus rezultă echivalența

22. $\Box \Diamond p = \Diamond p$,

iar prin regula de dualitate

23. $\Diamond \Box p = \Box p$

Așadar, reducerea tuturor modalităților complexe este un lucru ce se poate înfăptui, și anume, pentru cele de gradul 3:

$$\Box \Diamond \Box p = \Box (\Diamond \Box p) = \Box \Box p = \Box p$$

$$\Diamond \Box \Diamond p = \Diamond (\Box \Diamond p) = \Diamond \Diamond p = \Diamond p$$

Reducerile celor de gradul 2 sînt date direct de 22 și 23[37]. Prin urmare, în total, 6 modalități:

— două improprii, adevărul p și falsul $\sim p$,

— patru proprii, dintre care:

— două afirmative, necesar adevărul, „$\Box p$", și posibil adevărul, „$\Diamond p$",

— și două negative, necesar falsul (sau imposibilul) „$\Box \sim p$" (sau „$\sim \Diamond p$") și posibil falsul „$\Diamond \sim p$".

---

[37] După cum observă Prior, în acest sistem (S5), orice șir de simboluri $\Box$ și $\Diamond$, adică orice modalitate afirmativă, poate fi înlocuit prin ultimul său semn, respectiv $\Box$ sau $\Diamond$ (**A. N. Prior**, *Time and Modality*, Oxford, 1957, p. 124).

În încheiere vom face observația că din postulatul 21 se poate deduce și postulatul 9 (care trece, așadar, în rîndul teoremelor).

9. $\Box p \prec \Box \Box p$

Demonstrație:

[18.4: $\Box p/p$] $\Box p \prec \Diamond \Box p$ (1)

[22: $\Box p/p$] $\Box \Diamond \Box p = \Diamond \Box p$ (2)

[(1), (2)] $\Box p \prec \Box \Diamond \Box p$ (3)

[(3), 23] *Q.E.D.*

Prin urmare, pentru axiomatizarea *sistemului* 5 sînt suficiente postulatele 11.1 — 11.7 și 21. Dar el mai poate fi axiomatizat și într-o altă variantă, pe care o propune Becker. Anume adăugirea la sistemul 4 a postulatului

24. $p \prec \Box \Diamond p$

Acesta afirmă, evident, mai puțin decît 21, întrucît stabilește aceeași concluzie „$\Box \Diamond p$", dar pornind de la o premisă mai tare, p, decît premisa lui 21, anume $\Diamond p$. Din acest motiv, 9 trebuie și el păstrat pe lista postulatelor (nu mai poate fi demonstrat ca teoremă), listă care va conține deci pe 11.1 — 11.7, 9 și 24.

Becker numește propoziția 24 „axioma lui Brouwer" deoarece ea afirmă „adevărul implică absurditatea absurdității". Într-adevăr, înlocuind $\Box$ cu $\sim \Diamond \sim$, 24 se mai poate pune și sub forma: $p \prec \sim \Diamond (\sim \Diamond p)$. Afirmația conținută în ea este fundamentală, după cum vom vedea, în logica intuiționistă.

Să arătăm că 24 și 9 conduc la 21, deci la aceleași reduceri „totale" ale modalităților suprapuse:

21. $\Diamond p \prec \Box \Diamond p$

Demonstrație:

[24 : $\Diamond p/p$] $\Diamond p \prec \Box \Diamond \Diamond p$

[(1), 13] *Q.E.D.*
(13 fiind o consecință a lui 9 poate fi utilizată aici).

Și în cadrul sistemului 5, Becker dă o interpretare fenomenologică modalităților. Teza

21. $\Diamond p \prec \Box \Diamond p$

„modalitatea posibil implică propria ei necesitate" se explică astfel. Am văzut că necesitatea și posibilitatea definesc o sferă „ideală" sau „absolută". Ele sînt, în ordine, deasupra modurilor „contingente". Se poate spune — scrie Becker — că necesitatea se află deja în ființa acestor sfere și că expresiile verbale ale acestor modalități nu aduc nimic nou[38].

Pe de altă parte însă apar și paradoxe:

22. $\Diamond \Box p = \Box p$

„posibilitatea necesității este echivalentă cu necesitatea însăși" sau „posibilitatea și realitatea coincid cînd se referă la necesitate".

Becker crede că poate justifica și acest paradox prin interpretarea pe care o dă acelor sfere ideale cărora ar aparține și posibilitatea. Sfera posibilității ideale este de așa natură că orice structură este în ea necesară[39].

* 4.13. Un postulat de existență

Atunci cînd am studiat raportul dintre implicația strictă și cea materială în cadrul sistemelor lui Lewis, am observat că orice implicație strictă poate fi înlocuită într-o teoremă prin implicația materială corespunzătoare. Aceasta era o consecință directă a teoremei:

14.1 $p \prec q \; . \prec \; . \; p \supset q$,

în baza căreia dacă două propoziții se implică strict, atunci se implică și material.

---

[38] **O. Becker,** *op. cit.*, p. 520.
[39] *Ibid.*

Reciproca acestei teoreme însă, după cum am spus şi după cum s-a demonstrat, nu poate fi derivată în calculul lui Lewis. Ceea ce nu înseamnă însă că ar fi contradictorie cu axiomele acestuia. Dimpotrivă, este necontradictorie. Adică o putem postula, numai că sistemul astfel obţinut degenerează în cel din *Principia* (cap. 3 A), iar implicaţia strictă în cea materială. Dar am văzut că Lewis acordase celei dintîi un înţeles distinct de al celei din urmă. Prin urmare orice astfel de postulat vine de fapt în contradicţie cu acest înţeles.

În afară de aceasta, proprietăţile implicaţiei stricte, postulate de Lewis la începutul calculului său, sînt şi proprietăţi ale implicaţiei materiale, ceea ce poate atrage obiecţia că ele reprezintă de fapt o caracterizare incompletă a acesteia din urmă.

Pentru acest fapt logicianul american introduce printre axiomele sistemului său una care să exprime o proprietate specifică implicaţiei stricte şi pe care implicaţia materială să n-o aibă. O astfel de axiomă delimitează şi mai bine conţinutul acestei implicaţii. În acest scop el îşi îndreaptă atenţia spre una dintre proprietăţile propoziţiilor pe care implicaţia materială nu o putea exprima, şi anume proprietatea a două propoziţii de a fi independente, adică de a nu se putea deduce una din cealaltă. Am văzut că, în sensul implicaţiei materiale, dîndu-se două propoziţii, sau prima o implică pe a doua, sau a doua o implică pe prima:

$$p \supset q \,.\vee.\, q \supset p,$$

ceea ce face imposibilă independenţa lor. Nu există propoziţii independente.

Pentru implicaţia strictă însă nu are loc o asemenea teoremă. Dar nici contradictoria ei nu poate fi demonstrată. Cum ar suna această contradictorie? Există propoziţii independente, adică există propoziţii p şi q astfel încît

$$\sim (p \prec q) \,.\sim (p \prec \sim q)$$

Lewis propune lărgirea sistemului implicaţiei stricte prin postularea în cadrul său a acestui fapt. Evident, nu

o putem face luînd formula de mai sus drept axiomă. Aceasta ar echivala cu postularea faptului că toate propozițiile sînt independente — ceea ce ar constitui o contradicție vizibilă. Va trebui să lărgim cadrele formalismului pentru a exprima în el faptul că numai pentru unele propoziții p și q, formula de mai sus este valabilă. Lewis pune în fața unei expresii conținînd variabilele propoziționale p, q, r etc. simbolurile $(\exists p)$, $(\exists p, q)$, $(\exists p, q, r)$ etc. pentru a indica faptul că expresia este adevărată pentru unii p, pentru unii p și q, pentru unii p, q, r etc. Cu alte cuvinte, *cuantifică* variabilele propoziționale ale acestei expresii.

În aceste condiții, postulatul pe care vrea să-l introducă el este:

20.01 $(\exists p, q) : \sim (p \prec q) \,.\, \sim (p \prec \sim q)$

Pentru unii p și q, p nu implică strict q, și p nu implică strict „non-q" sau există o pereche de propoziții p și q în așa fel încît p să nu implice nimic cu privire la adevărul sau falsitatea lui q.

Implicația materială nu verifică acest postulat. Mai mult, axiomele sale vin în contradicție cu o asemenea proprietate. Deci Lewis distinge categoric cele două feluri de implicație.

Și acum să urmărim pe scurt cîteva din consecințele introducerii acestui postulat fără să insistăm însă, întrucît spațiul nu ne va permite, asupra metodelor lor de demonstrație.

20.5 $(\exists p, q, r) : \Diamond p \,.\, \Diamond q \,.\, \Diamond r \,.$
$\sim (p = q) \,.\, \sim (p = r) \,.\, \sim (q = r)$

Există cel puțin trei propoziții distincte compatibile cu ele însele.

20.51 $(\exists p, q, r) : \Diamond \sim p \,.\, \Diamond \sim q \,.\, \Diamond \sim r \,.$
$\sim (p = q) \,.\, \sim (p = r) \,.\, \sim (q = r)$

Există cel puțin trei propoziții distincte posibil false.

20.6 $(\exists p, q, r, s) : \sim (p = q) \,.\, \sim (p = r) \,.$
$\sim (p = s) \,.\, \sim (q = r) \,.\, \sim (q = s) \,.\, \sim (r = s)$

Există cel puțin patru propoziții distincte.

N-am făcut astfel decît să explicităm ceea ce era cuprins implicit în postulatul de existență 20.01, și anume că există cel puțin patru propoziții distincte — propozițiile p și q din postulat și negațiile acestora. Trei dintre ele, p, q și $\sim q$, sînt, pe baza teoremei

19.76 $\sim (p \prec q) \prec \Diamond p$,

logic posibile, căci există cel puțin o propoziție pe care n-o implică. Iar trei dintre ele, q, $\sim p$ și $\sim q$, sînt, pe baza teoremei

19.77 $\sim (q \prec p) \prec \Diamond \sim p$,

posibil false, căci pentru fiecare există cel puțin o propoziție de care nu este implicată. Prin urmare două dintre ele, q și $\sim q$, trebuie să fie posibile și posibil false, iar celelalte două, p și $\sim p$, trebuie să fie: una adevărată, cealaltă falsă.

Menționăm că fără postulatul de existență se putea demonstra că există doar două propoziții: una necesară și cealaltă (negația sa) imposibilă.

* 4.14. Implicație și deductibilitate

După cum am văzut, scopul urmărit de Lewis în construcția sistemelor sale era să delimiteze, prin proprietățile ei, o relație — implicația strictă — care să aibă loc între două propoziții p și q atunci și numai atunci cînd q este *deductibilă* din p.

Prevăzător, el precizează distincția ce trebuie făcută între *deducția logică* în general, în care se poate face uz de orice principiu logic valid (de exemplu principiul silogismului, principiul identității etc.), și *deducția logistică* — un caz special al primei —, care reprezintă modul de dezvoltare al unui sistem formal în care la deducția unei teoreme nu putem utiliza decît principiile demonstrate pînă la acel moment. Aceasta din urmă, schimbîndu-și conținutul pe măsura demonstrării de noi principii

în cadrul sistemului, nu poate fi definită (delimitată) de un șir de proprietăți, așa cum încercăm să facem cu cea notată prin simbolul „$\prec$". Deci nu poate fi vorba aici de „deductibil" decît în primul înțeles.

Sensul acestei deductibilități rezidă, după Lewis, exact în înțelesul pe care îl are implicația russelliană acolo unde este tautologică. Să ne explicăm.

În virtutea definiției ei (*3.4, def. 1.01), implicația materială poate fi adevărată fără ca totuși din antecedentul său să putem deduce consecventul (de exemplu: „Luna este făcută din brînză verde" implică „$2 + 2 = 4$"). Sînt însă cazuri cînd ea este nu numai adevărată, ci chiar tautologică (de exemplu $p \,.\supset.\, p \vee q$). Acestea și numai acestea sînt cele în care ea exprimă o deductibilitate logică (o „consecință formală" așa cum o defineau medievalii). Ele trebuie, prin urmare, exact acoperite de implicația strictă.

În acest sens, întreprinderea lui Lewis și-a atins în întregime scopul, căci, după cum vom arăta, implicația strictă se substituie exact acelor implicații materiale (din formule) care sînt tautologice.

Mai întîi din însăși definiția sa rezultă

$$p \prec q \,.=.\, \sim \Diamond (p \sim q) \,.=.\, \sim \Diamond \sim [\sim (p \sim q)],$$

deci ea este o implicație russelliană „necesară". Dar proprietatea unei formule din logica bivalentă de a fi „necesară" în logica lui Lewis coincide cu proprietatea ei de a fi teză în sistemul *Principiilor* (adică de a fi o tautologie). Într-adevăr, teoremele 13.21, 13.1, 14.25 și 14.27 ne arată că în axiomele puse de Russell și Whitehead la baza sistemului lor, implicațiile materiale pot fi înlocuite cu implicații stricte, cu alte cuvinte în lumina echivalențelor de mai sus rezultă că aceste axiome sînt „necesare" în logica lui Lewis.

Să observăm că această necesitate se păstrează și după efectuarea unor eventuale substituții.

Pe de altă parte, dacă o implicație russelliană $p \supset q$ și antecedentul ei, p, sînt „necesare", conform principiului 18.53

$$p \prec q \,.\sim \Diamond \sim p : \prec .\sim \Diamond \sim q,$$

rezultă că și consecventul q este „necesar".

Prin urmare, toate tautologiile calculului propozițional bivalent sînt în logica lui Lewis „necesare"[40].

În particular, implicațiile materiale tautologice sînt „necesare", deci substituibile prin implicații stricte.

Iată cîteva exemple de asemenea substituții

$p \,.\supset .\, q \supset p$	$p \,.\prec .\, q \supset p$
$\sim p \,.\supset .\, p \supset q$	$\sim p \,.\prec .\, p \supset q$
$\sim (p \supset q) \,.\supset .\, p \supset \sim q$	$\sim (p \supset q) \,.\prec .\, p \supset \sim q$
$\sim (p \supset q) \,.\supset .\, q \supset p$	$\sim (p \supset q) \,.\prec .\, q \supset p$

Toate aceste formule sînt valabile în logica lui Lewis[41]. Cele din dreapta se obțin, respectiv, din cele din stînga, prin înlocuirea implicației russelliene principale, care este tautologică, printr-o implicație strictă. Menționăm că înlocuirea și a altor implicații materiale nu ne mai conduce la formule valide.

Așadar, implicația strictă a fost degrevată de anumite proprietăți paradoxale, ce făceau implicația lui Russell total improprie scopului deducției (tezele 2.02, 2.21, 2.52, 2.521 din cap. 3 A). La rîndul său însă, implicația lui Lewis își are și ea „paradoxele" ei, și anume în loc de 2.02,

19.75 $\sim \Diamond \sim p \,.\prec .\, q \prec p,$

iar în loc de 2.21,

19.74 $\sim \Diamond p \,.\prec .\, p \prec q$

Nu putem să nu amintim încă o dată faptul că logicienii scolastici medievali cunoșteau foarte bine aceste conse-

[40] *Symbolic Logic*, pp. 252—253. Mai precis, întrucît demonstrația făcută utilizează numai teoreme din S1, rezultatul obținut este valabil în S1 și prin urmare în toate cele cinci sisteme S1—S5.

[41] Mai precis, în toate cele cinci sisteme S1—S5.

cințe inevitabile ale modului în care am definit implicația strictă: *Necesarium sequitur ad quodlibet* (Necesarul urmează din orice) și *Ex impossibili sequitur quodlibet* (Din imposibil urmează orice)[42].

După părerea lui Lewis însă, ele nu mai sînt paradoxale „decît în măsura în care reprezintă adevăruri logice prea ușor trecute cu vederea"[43], întrucît, așa cum rezultă și din teorema

19.891 $\sim \Diamond \sim p \,.=: p \,.=\, . r \vee \sim r,$

necesarul se identifică cu tautologicul, iar o propoziție de forma $r \vee \sim r$ poate fi dedusă din orice propoziție q printr-un raționament fără cusur:

din q rezultă $q\, r \,. \vee \,. q \sim r;$

ceea ce este totuna cu

$q \,.\, r \vee \sim r;$ deci $r \vee \sim r$

O justificare analogă se poate da și pentru 19.74.

Nimic de obiectat formalismului lui Lewis în afară de însuși acest formalism. Ce interes mai poate avea o deducție atunci cînd despre concluzie știm dinainte că este necesară! Așa cum s-a observat imediat, deoarece valoarea de adevăr a relației dintre p și q nu depinde de înțelesul celor două propoziții, calculul capătă un caracter extensional. Aceste concluzii îl determină pe Emch să tragă asupra implicației stricte concluzia pe care Lewis o trăsese asupra implicației materiale: că este prea largă în conținut față de noțiunea de deductibilitate logică[44]. La rîndul său, el propune, în cadrul unui formalism la fel de riguros, o nouă relație de implicație, *implicația logică*[45].

---

[42] Vedeți, spre exemplu, **A. Dumitriu**, *Istoria logicii*, p. 404.

[43] *Symbolic Logic*, p. 248.

[44] **A. F. Emch**, *Implication and deducibility*, în „Journal of Symbolic Logic", I (1936), pp. 26 — 35, 52.

[45] Pentru aceasta adaugă sistemelor lewisiene încă o noțiune primitivă, *consistența logică*. Noua relație de implicație — *implicația logică* — va fi atunci definită astfel:
„p implică logic q" înseamnă „este logic inconsistent ca p să fie adevărat și q fals".

Raporturile acesteia cu implicația strictă sînt perfect asemănătoare cu raporturile implicației stricte cu cea materială. În particular, paradoxele 19.75 și 19.74 sînt evitate, în locul lor apărînd însă niște expresii de același tip paradoxal (care afirmă că un anumit fel de propoziții sînt „implicate" de orice propoziție, iar un alt fel „implică" orice propoziție). S-ar părea, într-adevăr, așa cum observă și R. Blanché, că acest „caracter extensional al calculului nu este efectul unei simple contingențe istorice, ci este strîns legat de exigențele formalismului logic"[46].

Aceasta nu i-a demobilizat pe logisticieni în căutarea unor soluții formale pentru delimitarea relației de inferență. Vredenduin, spre exemplu, reia încercarea lui Lewis, dar renunță să mai definească implicația strictă[47], căci relațiile paradoxale 19.74 și 19.75 sînt o consecință directă a definiției

$$11.02 \quad p \prec q \;.=.\; \sim \Diamond (p \sim q)$$

Într-adevăr, în baza acestei definiții, p implică strict q înseamnă, după cum știm, nici mai mult nici mai puțin decît că propoziția „p și non q" este imposibilă. Cum însă cînd propoziția p este imposibilă conjuncția ei cu orice altă propoziție rămîne tot imposibilă, p va implica strict orice propoziție. La fel, cînd propoziția q este necesară, negația sa fiind o propoziție imposibilă, conjuncția ei cu orice altă propoziție rămîne tot imposibilă și q va fi implicată strict de orice propoziție.

Prin renunțarea la definiția 11.02, Vredenduin renunță de fapt să spună ce înseamnă implicația strictă și o admite astfel printre ideile primitive ale sistemului. În acest fel se arată că formulele paradoxale 19.75 și 19.74 nu mai pot fi derivate.

W. Ackermann este autorul unei alte încercări de a formaliza relația ce are loc între două propoziții între care

---

[46] **R. Blanché,** *Raison et Discours*, Paris, 1967, p. 186.

[47] **P. G. J. Vredenduin,** *A system of strict implication*, în „Journal of Symbolic Logic", IV, pp. 73—76.

subzistă o dependență logică *(ein logischer Zusammenhang)*[48]. Aceasta este numită de el *implicație riguroasă (strenge Implication)* și notată printr-o săgeată. În sistemul său, bazat pe 15 axiome și 4 reguli deductive, se poate dezvolta o teorie a modalității asemănătoare celei din S4. Totuși, și acesta este faptul cel mai important, nici paradoxele implicației materiale și nici cele ale implicației stricte nu pot fi demonstrate pentru „implicația riguroasă". Mai precis, nici una dintre formulele

$$p \to (q \to p); \quad \sim p \to (p \to q)$$

pe de o parte, și

$$q \to (p \to p); \quad (p \sim p) \to q$$

pe de altă parte, nu poate fi demonstrată[49].

Implicația riguroasă nu poate avea loc între două formule care nu au nici o variabilă propozițională comună.

Problema determinării unei relații formale care să exprime deductibilitatea a fost cercetată și de alți logi-

---

[48] **W. Ackermann,** *Begründung einer strengen Implication*, în „Journal of Symbolic Logic", XXI (1956), pp. 113—128. Sistemului i-au fost aduse completări în articolul lui **A. R. Anderson** și **N. D. Belnap Jr.,** *A modification of Ackermann „rigorous implication"* în „Journal of Symbolic Logic", XXIII (1958), pp. 457—458.

[49] În sistemul implicației stricte, deoarece $p \prec p$ era o teoremă, iar $p \sim p$ o contradicție, următoarele formule puteau fi demonstrate

$$\Box(p \prec q) \quad \text{și} \quad \sim \Diamond (p \sim p)$$

Și, prin urmare, aplicînd teoremele 19.75 și respectiv 19.74, se puteau deriva imediat teoremele

$$q \prec (p \prec p),$$

o tautologie $(p \prec p)$ este implicată de orice propoziție, și

$$(p \sim p) \prec q,$$

o contradicție implică orice propoziție. Ele au, ca și 19.75 și 19.74, același caracter paradoxal.

cieni, fiecare propunînd cîte o soluție a ei[50]. Ne vom opri la una dintre cele mai recente și mai interesante dintre ele, relația de *antrenare (entailment)* a lui A.R. Anderson și N.D. Belnap Jr.[51].

Critica pe care cei doi autori o fac predecesorilor lor este deosebit de severă. Așa-numitele paradoxe ale implicației materiale și ale implicației stricte nu sînt de loc paradoxale și în consecință implicația materială și cea strictă nu reprezintă specii nepotrivite de implicație, întrucît ele nu sînt de loc specii de implicație. Bazîndu-se pe rezultatele obținute în logică, „în mai bine de două mii de ani", Anderson și Belnap susțin că orice teorie satisfăcătoare a implicației trebuie să țină seama de două proprietăți importante ale acesteia: *necesitatea* și *potrivirea de sens (relevance)*. Iată pe scurt despre ce este vorba.

Validitatea unei inferențe stă nu în considerații materiale (de conținut), ci doar în considerații de ordin formal. Prin urmare ea nu poate reprezenta un fapt accidental, ci un fapt necesar. Or, această cerință este violată dacă relația de implicație, notată spre exemplu printr-o săgeată, satisface formula

$$p \rightarrow . q \rightarrow p,$$

căci în cazul în care p este o propoziție contingentă, validitatea inferenței $q \rightarrow p$ este garantată de un fapt contingent, fiind de asemenea un fapt contingent. Ca un exemplu de sistem în care implicația satisface condiția de necesitate este sistemul 4 al lui Lewis. (De ce autorii citați aleg

---

[50] Iată, după R. Blanché *(op. cit.*, p. 206), o listă a celor mai importante: după implicația „strictă" a lui Lewis au apărut implicația „analitică" a lui Parry, implicația „logică" a lui Emch, implicația „naturală" a lui Kaila, implicația „rațională" a lui Reichenbach, implicația „riguroasă" a lui Ackermann, implicația „plină" a lui Freudenthal și „relația de antrenare" *(entailment)* a lui Anderson și Belnap Jr. Blanché însuși propune o nouă bază de constituire a unei logici în care relația de deductibilitate să-și găsească locul său natural *(op. cit.*, p. 224).

[51] **A. R. Anderson** și **N. D. Belnap Jr.**, *The pure calculus of entailment*, în „Journal of Symbolic Logic", XXVII (1962), pp. 19—52.

dintre toate sistemele implicației stricte tocmai pe acesta nu este locul să explicăm aici.)

După cum am observat însă, sistemele lui Lewis conțin la rîndul lor expresii paradoxale, de exemplu 19.74 și 19.75. Spre deosebire de prima categorie de „paradoxe" la care ne-am referit și pe care Anderson și Belnap le denumesc „sofisme de modalitate"[52] *(fallacies of modality)*, acestea din urmă poartă în sine un alt gen de abatere de la înțelesul obișnuit al unei inferențe. De pildă 19.75 afirmă că, dacă o propoziție este necesară, ea rezultă din orice propoziție. Însă, de cîte ori facem o inferență de la o propoziție p la o altă propoziție q, cele două propoziții au ceva comun în înțelesul lor, o anume potrivire *(relevance)* de înțeles. Iar o asemenea afirmație ca 19.75 încalcă tocmai această cerință a potrivirii de înțeles dintre antecedentul și consecventul unei inferențe. Din acest motiv Anderson și Belnap le numesc „sofisme de potrivire" *(fallacies of relevance)*[53].

Sistemul care, după părerea lor, elimină atît sofismele de modalitate cît și pe cele de potrivire este sistemul implicației „riguroase" a lui Ackermann despre care am mai avut ocazia să pomenim în cursul acestui paragraf.

Pe de o parte am văzut că el elimină propozițiile de tipul

$$p \rightarrow . q \rightarrow p$$

și odată cu ele sofismele de modalitate. Ackermann reușise să demonstreze că în sistemul său, dacă p este o variabilă propozițională, iar q și r două formule oarecare, formula

$$p \rightarrow . q \rightarrow r$$

nu poate fi derivată. Deci este complet exclusă posibilitatea deducerii unei inferențe dintr-o propoziție contingentă.

---

[52] **Anderson** și **Belnap**, *op. cit.*, p. 42.

[53] Sisteme capabile să elimine sofismele de potrivire fuseseră propuse de **Moh Shaw-Kwei** *(The deduction theorems and two new logical systems*, în „Methodos", vol. 2 (1950), pp. 56—75), și **A. Church** *(The weak theory of implication*, în „Kontrolliertes Denken", München, 1951).

Pe de altă parte, potrivirea sau comunitatea de înțeles dintre antecedentul și consecventul unei implicații nu poate fi exprimată formal într-un calcul al propozițiilor decît printr-o comunitate de variabile propoziționale. Or, așa cum a arătat Belnap, implicația „riguroasă" nu poate avea loc între două formule care nu conțin cel puțin o variabilă propozițională comună.

Pentru acest motiv, Anderson și Belnap perfecționează sistemul propus de Ackermann, dînd relației de implicație din el numele de *relație de antrenare (entailment)*.

Iată cîteva teoreme verificate de această relație și pe care cei doi autori le consideră corecte atît sub aspectul necesității cît și sub cel al potrivirii de sens:

$p \to p$ legea identității

$p \to q \,.\to: q \to r \,.\to. p \to r$
$q \to r \,.\to: p \to q \,.\to. p \to r$
} cele două forme ale principiului silogismului.

Un procedeu simplu de a obține un calcul logic în care relația de implicație să fie scutită de o serie din proprietățile ei paradoxale a fost propus de R. Ackermann[54]. Iată în ce constă el. Se consideră ca teoreme ale noului calcul, pe lîngă teoremele calculului propozițional clasic din *Principia*, formulele ce se obțin din acestea prin înlocuirea implicației materiale cu o săgeată după următoarea regulă:

Dacă implicația materială nu se află într-o parte negată a teoremei respective și dacă, luată separat, împreună cu antecedentul și consecventul ei constituie o teoremă în *Principia*, ea poate fi înlocuită cu simbolul „$\to$". În caz contrar, nu.

Spre exemplu din $p \supset (q \supset p)$ se poate obține teorema $p \to (q \supset p)$, dar nu și $p \to (q \to p)$, deși $p \to (p \to p)$ este o teoremă a *MIC*-ului[55]. După cum observă Acker-

[54] **R. Ackermann,** *Introduction to Many-Valued Logics*, London, New York, 1967, pp. 9—14.

[55] *MIC* reprezintă prescurtarea de la *„minimal implicational calculus"*, cum își denumește R. Ackermann calculul său.

mann, calculul său utilizează $\rightarrow$ și $\supset$ pentru a separa din punct de vedere formal rolurile posibile ale implicației materiale în logica clasică[56]. El acordă evident rolul deductiv conectivei „$\rightarrow$". Dar și aceasta are proprietăți paradoxale, ca

$$(p \sim p) \rightarrow p,$$

fapt pentru care este introdusă o a treia conectivă notată „$\Rightarrow$".

Fie două formule de calcul propozițional clasic, astfel încît:

— prima este o disjuncție de mai mulți termeni și fiecare dintre acești termeni este o conjuncție de variabile propoziționale negate sau nenegate (această formulă poartă numele de *forma normală disjunctivă)*;

— a doua este o conjuncție de mai mulți termeni și fiecare dintre acești termeni este o disjuncție de variabile propoziționale negate sau nenegate *(formă normală conjunctivă)*.

În acest caz între prima formulă și cea de-a doua poate fi scris semnul $\Rightarrow$ dacă între fiecare din termenii disjuncției (care este prima formulă) și fiecare din termenii conjuncției (care este a doua formulă) poate fi scris semnul $\rightarrow$ și, în plus, fiecare asemenea pereche de termeni are în comun o variabilă propozițională negată sau una nenegată.

Spre exemplu între $(p \sim p)$ și q nu se poate scrie semnul $\Rightarrow$ [cu alte cuvinte formula $(p \sim p) \Rightarrow q$ nu este valabilă], căci singura pereche de termeni ce se prezintă în acest caz, $p \sim p$ și q, nu are în comun nici o variabilă propozițională.

Iată acum, în schimb, cîteva exemple de asemenea formule valabile:

$$p \Rightarrow p; \quad p \Rightarrow (p \vee q); \quad (p \cdot q) \Rightarrow p$$

R. Ackermann stabilește că sistemul S1 al lui Lewis conține drept teoreme formulele considerate la început și în care $\supset$ joacă rolul implicației materiale, iar $\rightarrow$ pe cel al

[56] **R. Ackermann**, *op. cit.*, p. 9.

implicației stricte. Dacă interpretăm însă semnul $\Rightarrow$ ca reprezentînd relația de antrenare *(entailment)* — din sistemul lui Anderson și Belnap —, formulele considerate la sfîrșit sînt teoreme în acest sistem.

* 4.15. Completări aduse sistemelor implicației stricte. Alte sisteme modale

Am văzut în paragraful precedent cum studiile lui Lewis au constituit punctul de plecare a numeroase cercetări urmărind formalizarea relației de deductibilitate logică.

Același rol l-au avut și în cercetările de logică modală. (Deși, după cum am arătat, aici Lewis a avut un precursor: pe Hugh MacColl.) Acestea au luat o dezvoltare considerabilă, fiind înmănuncheate de R. Feys într-un tratat a cărui osatură o constituie sistemele implicației stricte[57].

Să urmărim cîteva din dezvoltările ulterioare ale acestei logici.

Am demonstrat în paragraful precedent că orice principiu valabil al calculului propozițional bivalent este „necesar" în S2[58], în acord perfect cu accepția pe care o dăm de obicei necesității. Ne putem pune întrebarea: de ce orice principiu al calculului propozițional bivalent și nu orice principiu al lui S2? Restricția pare, într-adevăr, pur convențională și o putem înlătura adăugînd regulilor lui S2 (substituția, *modus ponens* și adjuncția) următoarea regulă:

Orice principiu valabil este „necesar".

Ceea ce în limbaj formalizat ar însemna că, dacă am demonstrat propoziția p, atunci este demonstrată și propoziția $\Box p$.

Obținem astfel un nou sistem, mai bogat în teoreme decît S2, care pe lîngă teoremele acestuia mai conține

[57] **R. Feys**, *Modal Logics* (ed. with some complements by J. Dopp), Louvain, Paris, 1965.

[58] Acest rezultat fusese obținut chiar în S1 (*4.14).

și formulele obținute prin prefixarea acestor teoreme cu unul sau mai multe semne de necesitate. El va fi notat cu T și se va numi *sistemul Feys-von Wright*, după cei doi logicieni care l-au propus în mod independent unul de altul[59].

Pornind tot de la S2, se pot construi și alte sisteme modale pe baza următoarei observații a lui Lewis[60].

Se demonstrează în S2 teorema

19.84 $\sim \Diamond \sim p \sim \Diamond \sim q \,.\prec.\, p = q$

„Două propoziții necesare sînt logic echivalente". În care înlocuind q cu $\sim \Diamond \sim p$ obținem:

$$\sim \Diamond \sim \sim \Diamond \sim p \,.\prec.\, p = \sim \Diamond \sim p$$

Deci, dacă există o propoziție p astfel încît $\sim \Diamond \sim \sim \Diamond \sim p$, atunci pentru ea au loc echivalențele:

$$p = \sim \Diamond \sim p; \quad \sim \Diamond \sim p = \sim \Diamond \sim \sim \Diamond \sim p$$

Dar atunci, dacă q este o propoziție astfel încît $q = \sim \Diamond \sim q$, în baza lui 19.84,

$$q = p$$

deci și pentru q avem:

$$\sim \Diamond \sim q = \sim \Diamond \sim \sim \Diamond \sim q;$$

prin urmare postulatul 9 (vedeți *4.11)

$$\sim \Diamond \sim p \prec \sim \Diamond \sim \sim \Diamond \sim p$$

are loc în general. El nu poate fi totuși demonstrat ca teoremă plecînd de la postulatele sistemului 2.

---

[59] **R. Feys** în *Les Logiques nouvelles des modalités*, „Revue Néoscolastique de Philosophie", vol. 40 (1937), pp. 517—553 și **G. H. von Wright**, *An Essay in Modal Logic*, Amsterdam, 1951. Cei doi logicieni pornesc de la axiome diferite dar **B. Sobocinski** a arătat că sistemele care se obțin astfel au aceleași teoreme, prin urmare sînt echivalente (vedeți **R. Feys**, *Modal Logics*, p. 114).

[60] *Symbolic Logic*, p. 499.

În consecință avem alternativele:

(a) sau există propoziții care sînt „necesare" și atunci pentru orice propoziție p:

$$\sim \Diamond \sim p = \sim \Diamond \sim \sim \Diamond \sim p,$$

(b) sau nici o propoziție nu este „necesar necesară" (deși pot exista, bineînțeles, și există chiar, propoziții necesare).

Cele două alternative sînt evident incompatibile. Postulatul 9 exprimă pe prima. Dar am văzut obiecția care i se poate aduce (că deși este o consecință a teoremei 19.84 nu poate fi dedus din postulatele 11.1 — 19.01). Fapt pentru care Lewis optează pentru a doua alternativă.

Această opțiune se exprimă prin introducerea postulatului

25. $\Diamond \Diamond p$

Orice propoziție este „posibil posibilă".

Într-adevăr, înlocuind p cu $\sim p$ obținem

$\Diamond \Diamond \sim p$, adică $\sim (\sim \Diamond \sim \sim \Diamond \sim p)$

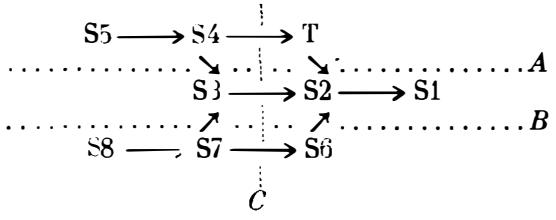
«pentru orice propoziție p nu este adevărat că ea este „necesar necesară"». Datorită incompatibilității celor două alternative, acest postulat nu poate fi adăugat nici sistemului 4 și nici sistemului 5, căci duce la contradicții. Halldén a numit (după Alban) *sistemul* 6 sistemul obținut prin adăugarea postulatului 25 sistemului 2, iar *sistemul* 7 — sistemul obținut prin adăugarea aceluiași postulat sistemului 3. Tot el a mai considerat un postulat mai tare decît 25, anume:

26. $\sim \Diamond \sim \Diamond \Diamond p$

Este necesar ca orice propoziție să fie „posibil posibilă". El a numit *sistemul* 8 sistemul obținut prin adăugarea lui sistemului 3.

Atunci notînd prin săgeată relația de incluziune între sisteme (spre exemplu S2 → S1 înseamnă „S2 conține toate teoremele lui S1", cu alte cuvinte S2 include pe S1),

cele nouă sisteme: S1—S8 și sistemul T al lui Feys-von Wright sînt aranjate de Prior în următoarea diagramă[61]:



Sistemele de deasupra liniei *A* conțin regula „dacă *p* este o teoremă, atunci □ *p* este și ea o teoremă".

Sistemele de dedesubtul liniei *B* conțin teza ◇◇ *p*, incompatibilă — după cum am văzut — cu această regulă.

Cele de la stînga liniei *C* conțin un număr finit de modalități; pentru cele de la dreapta (cu excepția lui S6) s-a demonstrat existența unui număr infinit de modalități complexe ireductibile.

Ceea ce am prezentat pînă acum sînt însă numai principalele dezvoltări ale logicii modale bazate pe logica implicației stricte. În această privință studiile s-au îmbogățit și diversificat într-un mod impresionant. În afara a numeroase reformulări ale sistemelor amintite mai sus, s-au studiat o serie de subsisteme ale lor, ca și alte sisteme, diferite de acestea, dar avînd anumite legături cu ele. Pentru a da un singur exemplu, putem menționa aici faptul că, plecînd de la subsistemul lui S1 pe care l-am notat aici S1° (vedeți nota 14 din acest paragraf), B. Sobocinski a construit o serie de subsisteme — S2°, S3° și S4° —, respectiv ale sistemelor S2, S3 și S4 (tot Sobocinski a arătat că S4° este echivalent cu sistemul T al lui Feys și von Wright)[62]. Alte cercetări importante în acest domeniu sînt legate de numele unor logicieni ca E.J. Lemmon, S. Halldén, R. Barcan-Marcus și alții.

---

[61] **A. N. Prior**, *Time and Modality*, p. 123.

[62] Pentru detalii și studiul acestor sisteme vedeți lucrarea lui **Feys**, *Modal Logics*.

* 4.16. Considerații generale

Am urmărit în acest capitol o serie întreagă de sisteme logice formale avînd toate un scop comun, anume formalizarea relației care are loc între două propoziții atunci cînd a doua poate fi în mod valid dedusă logic din prima. Aceasta, deoarece, după cum am avut ocazia să subliniem în mai multe rînduri, implicația lui Russell era valabilă și cînd asemenea relații de inferență, evident, nu se puteau stabili.

Din acest punct de vedere însă, poate fi discutabil care dintre relațiile de implicație ale sistemelor expuse este sau se apropie cel mai mult de relația de inferență căutată. Se pare că dintre cele cinci sisteme ale implicației stricte, S1 — S5, Lewis înclină către S2. Importanța acestor sisteme stă, după părerea sa, în faptul că în ele se poate face distincția între ceea ce este o tautologie în logica bivalentă și ceea ce este doar adevărat. Într-adevăr, după cum am văzut (*4.14), implicația strictă a două propoziții avea loc dacă și numai dacă implicația materială corespunzătoare era tautologică. În acest sens, scrie Lewis, sistemul implicației stricte (S2 — *n.n.*) se poate spune că furnizează acel canon și critică a inferenței deductive care este dezideratul investigațiilor logice[63].

Cît privește paradoxele care apar și care, după cum am văzut, au dat naștere la atîtea discuții, „ele sînt consecințe inevitabile ale unor reguli de inferență indispensabile"[64]. Evitarea lor deci nu poate fi făcută fără a renunța la asemenea reguli.

O altă problemă o constituie dificultățile ce se ivesc la înțelegerea acestor sisteme din pricina imposibilității de a interpreta numărul mare (cîteodată și infinit) de modalități complexe ireductibile care apar. Așa cum observă și Feys, „dacă s-ar găsi o interpretare naturală celor 14 modalități ale lui S4, ca să nu vorbim de cele 42 din S3, interesul acestor sisteme ar deveni de netăgăduit. Dar

[63] *Symbolic Logic*, p. 247.
[64] *Symbolic Logic*, ed. a II-a, 1959, *Appendix* III, p. 512.

aceste modalități complexe nu au un sens intuitiv cunoscut"[65]. Din acest punct de vedere S5, cu cele șase modalități ale sale, pune cele mai puține probleme de interpretare. Studiul matematic al unei asemenea interpretări l-a condus pe P. Henle la concluzia că sistemul S5 poate fi privit într-un anume fel ca o logică clasică[66], în care posibilitatea unei propoziții p este definită astfel:

$\Diamond p = 1$, adică „$\Diamond p$ este adevărat", sau, ceea ce este totuna, „p este posibil" înseamnă $p \neq 0$, adică p nu este fals[67]. După părerea lui Lewis, principala semnificație logică a sistemului S5 stă în aceea că el împarte toate propozițiile în două clase ce se exclud una pe cealaltă: clasa propozițiilor intensionale sau modale și clasa celor extensionale sau contingente. Potrivit legilor acestui sistem, toate propozițiile intensionale sau modale sînt necesar adevărate sau necesar false. Prin urmare, pentru orice propoziție modală, să zicem p_m,

$$\Diamond (p_m) = (p_m) = \sim \Diamond \sim (p_m)$$

și

$$\Diamond \sim (p_m) = \sim (p_m) = \sim \Diamond (p_m),$$

pe cînd, pentru propozițiile extensionale sau contingente, posibilitatea, adevărul și necesitatea rămîn distincte[68].

Fără îndoială, încercările lui Lewis, ca și ale celorlalți logicieni care l-au urmat, nu reprezintă un succes total. Dar ele au reamintit o idee pe care logicienii matematicieni păreau s-o fi dat uitării, și anume aceea că un principiu de logică este universal valid într-un dublu sens: pe de o parte sub aspectul extensiunii — ca o relație valabilă pentru toți —, pe de altă parte sub aspectul intensiunii —

---

[65] „Revue philosophique de Louvain", 1953, p. 600.

[66] Privită de fapt sub forma matematică a unui calcul algebric (algebra Boole-Schröder), vedeți *Symbolic Logic*, ed. a II-a, 1959, p. 501.

[67] În accepția acordată aici logicii clasice, presupunerea că p nu e fals nu ne mai conduce automat la concluzia că p este adevărat.

[68] *Symbolic Logic*, ed. a II-a, p. 501.

ca o legătură necesară. Așa cum observă și R. Blanché, în afara cazurilor în care recurgem la enumerarea completă, și în care universala se descompune într-o colecție de singulare, *totul* în extensiune, totalitatea nu poate face obiectul unei afirmații sigure dacă nu rezultă dintr-un tot în intensiune *(compréhension)*, dintr-o universalitate esențială, care nu are sens decît dacă exprimă necesitatea unei legi[69].

[69] **R. Blanché,** *op. cit.*, p. 176.

5
Logicile lui Lukasiewicz

* 5.1. Logica modală a lui Lukasiewicz

În capitolul precedent am văzut că Lewis făcuse uz de noțiunea de modalitate a unei propoziții în scopul definirii relației de implicație strictă. Pentru aceasta el apelase la noțiunile de necesitate, realitate (adevăr) și posibilitate deja introduse de Hugh MacColl înaintea sa. Logicianul polonez Jan Łukasiewicz s-a ocupat îndeaproape de studiul modalității, bazîndu-se pentru aceasta, după cum vom vedea, pe cercetările făcute în logică de la Aristotel, adică în peste 2000 de ani, ceea ce conferă studiilor sale un deosebit interes. În plus, metodele lui de cercetare sînt complet originale. Ele au constituit bazele a ceea ce astăzi logicienii numesc *logici polivalente*. Din acest motiv ideile sale au pentru noi un deosebit interes. Ele au apărut și s-au conturat în mai multe studii publicate de Łukasiewicz începînd din anul 1920. În paginile care urmează noi am utilizat pe cele mai cunoscute, și anume: cele două articole publicate în 1930 în *Comptes Rendus des séances de la Société des sciences et des Lettres de Varsovie* (respectiv *Untersuchungen über den Aussagenkalkül*, p. 1—21, 30—50, scos în colaborare cu elevul său Alfred Tarski, și *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls*, pp. 51—77) și

studiul *Die Logik und das Grundlagen problem* (apărut în *Les entretiens de Zürich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques*, 1941, pp. 88—100)[1].

* 5.2. Ideile primitive

Ideile primitive de la care pleacă Łukasiewicz sînt următoarele: vom nota o propoziție oarecare cu *p*. Propoziția „*p* este posibil" se va nota în felul următor: se ia inițiala majusculă a cuvîntului „*möglich*" (posibil), adică „*M*", și se pune înaintea propoziției *p* a cărei posibilitate vrem să o exprimăm: adică *Mp*. Negația, care va însemna simplu non-*p* (nu e adevărat *p*), se va însemna cu *N*. Așadar, *Np* va însemna „non-*p*". Pe scurt, simbolurile introduse fără a fi definite sînt, în logica lui Łukasiewicz, *p*, *Mp* și *Np*. Urmează să vedem acum la ce combinații dau loc aceste idei*. Să le trecem pe toate într-un tabel, pentru a le avea în evidență.

(1) „*p* este o propoziție"	— în simboluri	*p*
(2) „*p* este fals"	— „ „	*Np*
(3) „*p* este posibil"	— „ „	*Mp*
(4) „*p* nu este posibil"	— „ „	*NMp*
(5) „este posibil non-*p*"	— „ „	*MNp*
(6) „nu este posibil non-*p*"	— „ „	*NMNp*
(„nu este posibil ca *p* să fie fals")		

[1] De asemenea, am utilizat expunerea sistemului trivalent a lui Łukasiewicz făcută în *Symbolic Logic* a lui **Lewis** și **Langford**, capitolul VII, precum și contribuțiile deosebit de importante aduse de **J. B. Rosser** și **A. R. Turquette** în lucrarea lor *Many-Valued Logics* (Amsterdam, 1952).

* Aceste categorii se examinează aici din punctul de vedere al logicii formale, analiza lor filozofică, dialectica lor nu intră în obiectul nostru.

Propoziția (6) poate fi citită și altfel: dacă spunem „nu este posibil ca p să fie fals", aceasta echivalează cu „p este necesar adevărată" sau mai pe scurt „p este necesar".

Ultimele patru modalități nu sînt identificate de Łukasiewicz cu judecățile problematice și apodictice ale lui Kant, ci cu cele patru moduri scolastice: 1) *possibile*; 2) *impossibile*; 3) *contingens*; 4) *necessarium*.

În afară de aceste moduri se mai introdusese în evul mediu încă două moduri ale propozițiilor, „*verum*" și „*falsum*", care au fost identificate cu „p este adevărat" — notat cu p — și „p este fals" — notat cu Np. Toate acestea nu sînt aserțiuni, ci numai propoziții ipotetice.

Iată ideile primitive ale logicii lui Łukasiewicz.

* 5.3. Propoziții modale primitive

Łukasiewicz consideră trei grupe de propoziții, care se întîlnesc în istoria logicii și care au fost privite de logicieni ca evidente. Iată aceste propoziții care se referă la modalități.

Prima grupă:

(a) *Ab oportere ad esse valet consequentia.*

(b) *Ab esse ad posse valet consequentia.*

Prin contrapoziție se capătă din (b):

(c) *Ab non posse ad non esse valet consequentia.*

Ce spun aceste propoziții? Propoziția (a) înseamnă: de la a fi necesar la a fi, este valabilă consecința.

Cu alte cuvinte, aplicînd-o la propoziții, fiindcă acestea ne interesează aici, vom spune: dacă o propoziție este necesară, atunci ea este adevărată. (Necesitatea implică realitatea.)

Propoziția (b) exprimă: de la a fi la a fi posibil, este valabilă consecința. Așadar, dacă o propoziție este adevărată, ea este posibilă. (Adevărul sau realitatea unei propoziții implică posibilitatea ei.)

În sfîrșit, propoziția (c) are semnificația: de la imposibil la neexistență, este valabilă consecința.

Imposibilitatea unei propoziții atrage drept urmare logică falsitatea ei, irealitatea ei. (Imposibilitatea are de consecință irealitatea, falsitatea.)

Pentru înțelegerea propoziției (c), Łukasiewicz dă un exemplu: „Este imposibil ca un număr prim să fie divizibil cu 4; deci nici un număr prim nu este divizibil cu 4"[2]. Imposibilitatea implică inexistența.

Ca propoziție reprezentantă a primei grupe, Łukasiewicz formulează:

I. „Dacă nu este posibil *p*, atunci non-*p*". Așadar: dacă *p* este imposibil, urmează că *p* este fals.

O propoziție mai puțin cunoscută decît precedentele, dar nu mai puțin intuitivă, este următoarea, care formează grupa a doua.

A doua grupă:

(d) *Unumquodque, quando est, oportet esse*[3].

Ce spune această propoziție? „Cînd ceva există, cu necesitate există".

Łukasiewicz lămurește astfel această afirmație: „Nu tot ce există *(Seiendes)* este necesar, după cum nu orice nu există *(Nichtseiendes)* este imposibil; dar cînd ceva care există este (dat), atunci este necesar și cînd ceva care nu există nu este (dat) atunci este imposibil"[4].

De pildă, scrie Łukasiewicz, „nu este necesar să fiu acasă astă-seară, dar dacă sînt acasă astă-seară atunci, cu această presupunere, este necesar să fiu acasă astă-seară".

Ca propoziție reprezentantă a celei de-a doua grupe, Łukasiewicz înscrie următoarea:

II. „Dacă se presupune non-*p*, atunci (cu această presupunere) nu este posibil *p*".

---

[2] **J. Łukasiewicz,** *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls*, p. 53.

[3] Propoziția aceasta este citată de Leibniz în *Theodicee*, dar se trage de la Aristotel *(De Interpretatione*, 9,19 a, 23).

[4] **J. Łukasiewicz,** *op. cit.*, p. 53.

Mai precis, dacă presupunem că *p* este fals realmente, atunci *p* nu este posibil, dar numai cu condiția acestei presupuneri.

În sfîrșit, a treia grupă de propoziții constă dintr-o singură propoziție, pe care Aristotel o numește „posibilitatea de amîndouă părțile"[5], „posibilitatea bilaterală". El ilustra această posibilitate prin exemplul următor: „Se poate ca această haină să se rupă, dar se poate să nu se rupă". Łukasiewicz dă un alt exemplu: „Se poate ca acest bolnav să moară, dar se poate și să nu moară". Este ceea ce se numește, după cum am mai spus, „contingența viitorului", întrucît propozițiile de felul acesta se referă la întîmplările viitoare pe care nu le putem cunoaște în prezent.

Łukasiewicz formulează următoarea propoziție, exprimînd tocmai această posibilitate „bilaterală".

III. „Pentru un *p* oarecare este posibil *p* și este posibil non-*p*".

Adică pentru o propoziție oarecare *p*, propoziția „*p* este adevărat" este posibilă, după cum este posibilă propoziția „*p* este fals".

Avem, așadar, trei propoziții modale primitive.

* 5.4. Consecințele primelor două propoziții modale

Vom introduce un nou semn, acela al implicației.

Pentru două propoziții *p* și *q*, care sînt astfel încît — orice ar însemna ele — dacă prima este adevărată și a doua este adevărată, Łukasiewicz, utilizînd un simbolism propriu, scrie întîi litera *C*, după care pune, în ordinea lor, cele două propoziții *p* și *q*. Astfel „*Cpq*" înseamnă „dacă *p* este adevărat, atunci și *q* este adevărat" și se va citi pe scurt:

Cpq: „dacă *p* atunci *q*"

---

[5] *De Interpretatione*, 9, 19 a, 9.

Simbolurile *M*, *N*, *C*, precum și altele, de același fel, care vor mai fi introduse se numesc *functori*, termen întrebuințat de Kotarbinski. Să se observe că functorii nu afirmă nimic: ei „modalizează" numai propozițiile.

Să formulăm acum, în simbolurile noastre, propoziția I. Vom căpăta o propoziție simbolică, o *teză*. (Sub numele de teze, Łukasiewicz înțelege — după Łesniewski — atît axiomele cît și teoremele unui sistem.) Vom căpăta teza 1:

1. *CNMpNp*

„Dacă *p* nu este posibil, atunci *p* este fals". Pentru a nu exista vreo îndoială asupra simbolismului, să procedăm astfel: avem un semn „*C*" de implicație, care leagă două propoziții; prima propoziție va începe de la primul functor de după *C* și va ține pînă unde este primul semn de propoziție, în cazul nostru *p*; a doua propoziție începe de la functorul imediat de după *p* și ține pînă unde se ivește iarăși un semn de propoziție, aici *p*; dacă ar mai fi o a treia propoziție, ea s-ar determina la fel. Așadar, în loc să scrie:

NMp implică *Np*

Łukasiewicz a scris, simplu

CNMpNp,

care se citește: „dacă *p* nu este posibil, atunci non-*p*".

A doua propoziție (II) poate fi formulată ca o implicație, care nu este decît implicația precedentă inversată:

2. *CNpNMp*

„Dacă non-*p*, atunci *p* este imposibil".

Deocamdată ne oprim la aceste două propoziții, rămînînd ca, mai departe, să o introducem și pe a treia. Iată dar fixate ideile primitive și propozițiile primitive. Pentru a deduce din acestea alte teze, Łukasiewicz întrebuințează două reguli de deducție: substituția și ceea ce el numește „despărțirea", care nu este altceva decît *modus ponens*: dacă o teză trecută pe lista propozițiilor adevărate implică o altă teză, atunci și aceasta este ade-

vărată și poate fi trecută în aceeași listă. Vom numerota tezele în aceeași ordine pe care o dă Łukasiewicz. Înaintea unei teze numerotate se va găsi un rînd care nu poartă nici un număr, acesta indicînd ce substituții urmează să fie făcute. Un rînd de felul acesta este compus din două părți despărțite de semnul „×".

Semnele dinaintea lui × constituie o formulă care este aceeași cu cea de după ×, numai că este notată în chip deosebit. Înaintea semnului × se scrie substituția ce trebuie făcută; de exemplu, $3q/Mp$ arată că în formula (teza) 3 trebuie înlocuit q cu Mp. Vom trata la timp, în întregime, un exemplu pentru a se observa bine procedeul.

Teze

1. $CNMpNp$

2. $CNpNMp$

3. $CCNqNpCpq$

4. $CCNpqCNqp$

5. $CCpNqCqNp$

6. $CCpqCCqrCpr$

Aceste șase teze sînt acceptate de Łukasiewicz fără a fi demonstrate; ele sînt de fapt axiomele sistemului. Primele două sînt propozițiile modale I și II; tezele 3, 4 și 5 sînt forme ale principiului transpoziției; teza 6 este silogismul ipotetic. Pentru a nu da loc la vreo confuzie eventuală, să citim una din ele, mai complicată, fie teza 3: $CCNqNpCpq$. Avem aici, la începutul formulei, două semne de implicație, ceea ce ar putea părea echivoc. Se observă însă că propozițiile noastre sînt:

$$Nq \quad Np \quad p \quad q$$

Avem una după alta propozițiile Nq și Np; unul din cele două semne inițiale C leagă aceste propoziții, $CNqNp$;

după aceea semnul C din interiorul formulei se referă la p și q, deci Cpq. În sfîrșit, unul din semnele C, care a mai rămas liber, articulează aceste două propoziții $CNqNp$ și Cpq. Așadar, $CCNqNpCpq$ cum se va citi? Dacă non-q implică non-p, atunci p implică q.

Să trecem acum la tezele care au nevoie de demonstrație. Pentru a demonstra teza 7, vom scrie mai întîi rîndul care indică substituția: $3q/Mp \times C1-7$.

Cum am spus, acesta indică că în formula 3 trebuie să înlocuim pe q cu Mp; rezultatul este scris în dreapta semnului $\times$, pe scurt, și este $C1-7$, adică teza 1 implică teza 7 și deci, după *modus ponens*, putem scrie teza 7 ca adevărată. Să facem această substituție:

$$\underbrace{CCNMpNp}_{1}\ \underbrace{CpMq}_{7} \times C1-7.$$

Se vede că, după substituție, formula noastră s-a transformat în „teza 1 implică teza 7" și demonstrația este făcută.

Să scriem acum tezele demonstrate de Łukasiewicz indicînd numai substituțiile ce trebuie făcute.

$3q/Mp \times C1-7$

7. $CpMp$

$7\ p/Np \times 8$

8. $CNpMNp$

$4\ q/MNp \times C8-9$

9. $CNMNpp$

$6\ p/NMNp,\ q/p,\ r/Mp \times C9-C7-10$

10. $CNMNpMp$

$4\ p/MNp,\ q/Mp \times C10-11$

11. $CNMpMNp$

* * *

3 q/p, p/Mp × $C2$—12

12. $CMpp$

12 p/Np × 13

13. $CMNpNp$

5 p/MNp, q/p × $C13$—14

14. $CpNMNp$

6 p/Mp, q/p, $r/NMNp$ × $C12$—$C14$—15

15. $CMpNMNp$

5 p/Mp, q/MNp × $C15$—16

16. $CMNpNMp$

Tezele de la numărul 7 la numărul 11 inclusiv rezultă din teza 1 (propoziția modală I); tezele de la 12 la 16 inclusiv rezultă din teza 2 (propoziția modală II).

Să citim unele teze din prima grupă (7—11). De pildă, teza 7 spune: „Dacă p, atunci p este posibil". Teza 9: „Dacă nu este posibil non-p, atunci p". În general, tezele 7—11, din prima grupă, sînt evidente. Nu tot așa se întîmplă cu tezele din a doua grupă, 12—16. De exemplu, teza 12 („*CMpp*"): „Dacă p este posibil, atunci p". Pe baza acestei teze Łukasiewicz se crede îndreptățit să facă inferența următoare, destul de surprinzătoare: „Este posibil ca bolnavul să moară, așadar moare". Concluzia este destul de bizară și Łukasiewicz scrie: „Această concluzie va fi admisă numai de aceia pentru care nu există nici o diferență între a fi posibil *(Möglich sein)* și a fi *(Sein)*"[6]. Vom reveni la sfîrșitul capitolului asupra acestei încheieri.

[6] **J. Łukasiewicz,** *op. cit.*, p. 57.

Tezele 12—16 sînt transformări respective ale tezelor din prima grupă 7—11. Teza 2 (adică propoziția II) este transpoziția tezei 1 (a propoziției I), adică implicația inversă celei din teza 1, cum se vede ușor din comparația lor,

2. *CNpNMp*

1. *CNMpNp*

unde se observă că s-au intervertit, pur și simplu, termenii implicației între ei. Urmează că tezele din a doua grupă sînt transpozițiile tezelor respective din prima grupă. Avem cinci teze în prima grupă și cinci teze în a doua grupă; ele își corespund întru totul. De exemplu, să luăm ultima teză (11) din grupa întîi și ultima teză (16) din grupa a doua:

11. *CNMpMNp*

16. *CMNpNMp*

Afirmația noastră este evidentă. Tot astfel se verifică același lucru și pentru celelalte teze. Acest rezultat ne duce însă la concluzia că cele două grupe de teze reprezintă de fapt o grupă de cinci echivalențe fiindcă avem implicații simultane reciproce. De aceea Łukasiewicz scrie „Cine admite amîndouă grupele de teze trebuie să accepte că propozițiile următoare sînt echivalente între ele: „*p*"; „*p* este posibil"; „nu este posibil non-*p*" sau „*p* e necesar". Tot așa propozițiile: „non-*p*"; „non-*p* este posibil"; „nu este posibil *p*" trebuie privite ca echivalente".

Într-adevăr, să considerăm numai un exemplu. Fie tezele 7 și 12 care își corespund în cele două grupe:

7. *CpMp*

12. *CMpp*

Ele reprezintă echivalența lui *p* cu *Mp*. Așa se pot cerceta mai departe și celelalte echivalențe.

Cu aceasta însă, noțiunile de necesie ștati de posibilitate introduse devin superflue, odată ce, în această logică,

„a fi posibil" echivalează cu „a fi adevărat", „a fi necesar" echivalează cu „a fi adevărat" etc.

Łukasiewicz crede că ajungem la această concluzie din cauza propoziției modale primitive II[7]: „Dacă se presupune că non-*p*, atunci (cu această presupunere) nu este posibil *p*". Propoziția este evidentă, după el, numai că traducerea ei

2. *CNpNMp*,

cu toate că poate fi dovedită că reprezintă propoziția II, nu redă exact sensul ei. Acest lucru se întîmplă din cauză că nu avem mijloace suficiente în logica bivalentă ca să exprimăm complexitatea mai vastă de sens pe care o are propoziția II, traducînd-o simbolic printr-o simplă implicație.

În rezumat, calculul bivalent aplicat propozițiilor modale ajunge la o confuzie a lor, astfel că nu ne aduce absolut nimic nou.

* 5.5. Consecințele celei de a treia propoziții modale primitive

Nu am utilizat pînă acum propoziția primitivă III. Łukasiewicz crede că ea nu poate fi exprimată simbolic decît dacă se lărgește calculul propozițional[8].

Să introducem atunci, odată cu Łukasiewicz, următoarele noi simboluri. Fie Σ un *cuantificator particular*, așa fel încît dacă îl punem în fața unei propoziții să arate că este vorba de un caz particular, nu de toate cazurile.

„Σp" = „pentru un p oarecare"

Σp înseamnă deci, că p nu e luat în general, ci ca un caz dat, ca o propoziție dată.

---

[7] *Ibidem*.
[8] *Ibidem*, p. 58.

Fie acum și simbolul conjuncției logice, K, astfel încît, dacă îl punem înaintea a două propoziții, aceasta înseamnă că ele au loc simultan:

„Kpq“ = „p și q“

Putem scrie propoziția III în mod simbolic astfel (continuînd numerotarea):

17. $\Sigma pKMpMNp$

„Pentru un p oarecare este posibil p și este posibil non-p“.

Cuantificatorul „Σ“ poate fi exprimat printr-un alt cuantificator, anume *cuantificatorul universal* „Π“.

Semnificația lui „Π“ este:

„Πp“ = „pentru fiecare p“,

adică „pentru toți p“. Să notăm pe scurt cu

„$\alpha(p)$“ = o propoziție în care intră p, adică o formulă care conține pe p.

În fața unei formule care reprezintă o definiție vom pune litera D urmată de un număr de ordine.

Vom defini:

D1 $\quad \Sigma p\ \alpha\ (p) = N\Pi pN\ \alpha\ (p)$

Să o citim: partea de la stînga semnului „=“ este „pentru un oarecare p este valabilă $\alpha(p)$“; partea din dreapta semnului „=“ este „nu e adevărat că pentru oricare p nu e valabilă $\alpha(p)$“; aceste două expresii au același sens. Așadar, Σp și $N\Pi pN$ au același efect, dau aceeași semnificație unei expresii $\alpha(p)$. Să facem atunci această substituție

$p/N\Pi pN$ în 17;

obținem:

18. $N\Pi pNKMpMNp$,

care este teza 17 exprimată cu cuantificatorul Π.

Ea semnifică: «Nu este adevărat că pentru oricare p, propoziția „p este posibil și non-p este posibil“ este falsă».

Łesniewski a considerat un sistem logic încă mai general pe care l-a numit *Protothetică*.

În loc să considere functori constanți, cum sînt M, N, C, K etc., Łesniewski a introdus functorii variabili nedeterminați. În *Protothetică* se demonstrează că dacă „φ" este un functor care are numai o variabilă ca argument, adică dacă avem φp (φ un functor variabil), atunci formula următoare este valabilă:

$$CK\varphi p\varphi Np\varphi q.$$

„Dacă φp este valabil și în același timp φNp este valabil, atunci este valabil și φq". Cu alte cuvinte, dacă propoziției p i se aplică functorul și în același timp este valabilă și semnificația lui pentru propoziția non-p, atunci functorul φ se aplică oricărei propoziții q. Ceea ce este și evident. Cum functorul φ este oarecare, relația de mai sus se menține și pentru cazul particular, cînd luăm $\varphi = M$. Așadar:

19. $CKMpMNpMq$

„Dacă propoziția p este posibilă și în același timp este posibilă non-p, atunci orice propoziție q este posibilă".

Pentru a demonstra încă cîteva teze, să amintim care sînt regulile de demonstrație:

1. Substituția
2. Despărțirea *(Modus ponens)*
3. Adăugarea (introducerea) cuantificatorului.

Primele două reguli le-am utilizat mai înainte. Ultima regulă este: «Dacă în membrul al doilea al unei implicații adevărate se află o variabilă propozițională liberă „p", care nu intră și în membrul întîi al implicației ca variabilă liberă, atunci se poate pune în fața membrului doi al implicației date semnul „Πp"». Intervenția acestei reguli într-o demonstrație o vom însemna prin „$+$" (se adaugă cuantificatorul Π). Această adăugare a cuantificatorului „Πp" nu arată decît că implicația este valabilă pentru oricare p.

Să considerăm şi regula bine cunoscută din logica bivalentă, după care o implicaţie adevărată dă prin transpoziţia termenilor o implicaţie adevărată

$$p \supset q \,.\supset\,.\sim q \supset \sim p$$

şi care poate fi scrisă în simbolica lui Łukasiewicz:

$$CCpqCNqNp$$

În condiţiile acestea avem aici următoarele teze:

18. $N\Pi pNKMpMNp$

19. $CKMpMNpMq$

20. $CCpqCNqNp$

* * *

20 $p/KMpMNp$, q/Mq $\times$ $C19{-}21$

21. $CNMqKMpMNp$

21 $+\Pi \times 22$

22. $CNMq\Pi pNKMpNp$

4 p/Mp, $q/\Pi pNKNpMNp \times C22q/p$ — $C18{-}23$

23. Mp

Am obţinut „p este posibil" unde „p" reprezintă o propoziţie arbitrară.

Am ajuns astfel, pe baza propoziţiei III, la teorema 23, după care orice este posibil (orice ar exprima propoziţia arbitrară „p"). Cu aceasta, dacă totul este posibil, atunci nimic nu este imposibil şi nimic necesar. Într-adevăr, dacă „Mp" este adevărată, atunci, înlocuind pe „p" cu „Np", obţinem „MNp"; orice propoziţie falsă este posibilă.

Deoarece „Mp" şi „MNp" sînt adevărate, urmează că negaţiile lor trebuie respinse, fiind propoziţii false: „NMp" şi „$NMNp$", care reprezintă respectiv „nu este posibil p" şi „nu este posibil non-p" sînt propoziţii false.

Astfel nu putem avea niciodată o propoziție adevărată care să exprime imposibilitatea unei propoziții, fie ea socotită adevărată („p"), fie falsă („non-p").

Acestea sînt urmări ale tezei 17, respectiv 18, și care după Łukasiewicz nu pot căpăta altă formă simbolică, chiar în calculul lărgit prin introducerea cuantificatorilor[9].

* 5.6. Incompatibilitatea propozițiilor modale primitive în calculul bivalent

Toate aceste rezultate penibile, crede Łukasiewicz, se datoresc mecanismului prea sărac al calculului logic bivalent. Nu numai atît, acest calcul conduce la propoziții care nu pot fi acceptate. De exemplu, dacă combinăm teza 12 cu teza 23, căpătăm teza 24:

12. $CMpp$

23. Mp

24. p

Prin urmare, dacă privim ca adevărate tezele 12 și 23, atunci, după consecința 24, orice propoziție p este valabilă și ajungem, astfel, la un sistem contradictoriu.

Nu putem conchide decît că propozițiile II și III sînt incompatibile în reprezentarea lor simbolică.

Ne-am bazat, pentru a ajunge la acest rezultat, pe o propoziție a *Prototheticei*. Același rezultat poate fi însă obținut și direct, utilizînd numai tezele 12, 13 și 20 și tezele obișnuite ale calculului propozițional bivalent. Łukasiewicz alege următoarele teoreme din logica lui Russell:

$$\vdash : p \,.\supset.\, q \supset p$$

[9] *Ibidem*, p. 60.

„O propoziție adevărată p este implicată de oricare propoziție q".

$$\vdash . \sim (p . \sim p)$$

„Nu este adevărat p și în același timp non-p" (principiul contradicției).

$$\vdash :: p \supset q . \supset :. r \supset s . \supset : p . r . \supset . q . s.$$[10]

În simbolica lui Łukasiewicz, acestea vor fi scrise astfel:

25. $CpCqp$

26. $NKpNp$

27. $CCpqCCrsCKprKqs$

$27\ p/Mp,q/p,r/MNp,s/Np \times C12 - C13 - 28$

28. $CKMpMNpKpNp$

$20\ p/KMpMNp,q/KpNp \times C28 - C26 - 29$

29. $NKMpMNp$

$25\ p/NKMpMNp \times C29 - 30$

30. $CqNKMpMNp$

$30 + \Pi \times 31$

31. $Cq\Pi pNKMpMNp$

$31\ q/CpCqp \times C25 - 32$

32. $\Pi pNKMpMNp$

Teza 32 este însă contradictorie cu teza 18, care este:

18. $N\Pi pNKMpMNp$

Am ajuns la două teoreme adevărate care sînt contradictorii. Prin urmare propozițiile modale primitive II și III (18 se bazează pe II, 32 pe III) sînt incompatibile.

În fața acestui rezultat, Łukasiewicz scrie că putem avea două ieșiri. Mai întîi, propoziția I și tezele care țin

[10] Poate fi obținută din teorema 3.47 din *Principia Mathematica*.

de ea (tezele 1 și 7—11) trebuie recunoscute ca adevărate, întrucît sînt și evidente și nu dau loc, niciodată, la nici o îndoială.

Dintre propozițiile II și III nu putem alege decît una, nu amîndouă deodată, fiindcă sînt contradictorii. Dacă ne decidem pentru propoziția II și tezele ce derivă din ea (tezele 2 și 12—16), atunci toate propozițiile modale devin echivalente cu cele nemodale — cum am arătat —, ceea ce arată că este superfluu a introduce propozițiile modale în logică. Pe lîngă aceasta, ajungem și la propoziții destul de dificile de acceptat[11].

Dacă ne decidem pentru propoziția III, trebuie să recunoaștem și consecințele ei paradoxale, că totul este posibil, și iarăși nu mai are nici un sens să introducem modalitatea propozițiilor.

* 5.7. Logica trivalentă

Łukasiewicz trage din aceste constatări bizare o altă concluzie decît aceea la care ne-am fi așteptat.

Logica clasică — ca și aceea a lui Russell — admitea două valori pentru propoziții: adevărat și fals (*A* și *F*). Principiul terțiului exclus era pentru aceste logici o propoziție fundamentală. Aristotel a susținut acest principiu, dar a arătat că e discutabil pentru întîmplări viitoare.

Dacă luăm propoziția „este posibil ca să fiu la Varșovia la 21 decembrie", ea este posibilă, dar nu necesară. Astăzi ea nu este nici falsă, nici adevărată. Principiul terțiului exclus nu i se aplică, prin urmare. Există deci o valoare de adevăr pentru unele propoziții care nu este nici adevărul (*A*) și nici falsul (*F*). Łukasiewicz introduce pe această bază o a treia valoare, „posibilul", fundînd astfel o logică cu trei valori de adevăr. Am putea să însemnăm această valoare cu *P*. Deoarece unii logicieni

[11] **J. Łukasiewicz**, *op. cit.*, p. 61.

notaseră cu 1 adevărul şi cu 0 falsul, Łukasiewicz notează a treia valoare de adevăr cu 1/2, ceea ce este indiferent. *„Es ist eben das Mögliche, das als dritter Wert neben das Falsche und das Wahre an die Seite tritt"*[12].

Este evident că dacă o propoziţie „posibil adevărată" are valoarea 1/2 şi negaţia ei are tot valoarea 1/2. Dacă *„Mp"* are valoarea 1/2 şi *„MNp"* are valoarea 1/2. Vom avea deci următoarea *matrice* pentru negaţie:

p	0	$\frac{1}{2}$	1
N	1	$\frac{1}{2}$	0

În linia lui p am scris valorile de adevăr ale lui p; în linia lui N (negaţia) am scris valorile corespunzătoare negaţiei ei. Dacă o propoziţie p are valoarea 0 (falsul), atunci negaţia ei are valoarea 1 (adevărul) etc. Să găsim acum matricea corespunzătoare implicaţiei. În logica bivalentă această matrice era simplu de construit. În logica trivalentă şi implicaţia (functorul *„C"*) va avea trei valori: adevărat, fals şi posibil. Sînt de examinat, în afară de cazurile din logica bivalentă (care erau patru), încă următoarele cinci cazuri unde intră valoarea 1/2, pentru a vedea ce valori de adevăr rezultă pentru implicaţie:

$C\ 0\ \frac{1}{2}$: falsul implică posibilul

$C\ \frac{1}{2}\ 0$: posibilul implică falsul

$C\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$: posibilul implică posibilul

[12] *Ibidem*, p. 64.

$C\,\frac{1}{2}\,1$: posibilul implică adevărul

$C1\,\frac{1}{2}$: adevărul implică posibilul.

După cercetări atente, Łukasiewicz a găsit următoarea matrice a implicației, care se citește ușor; în coloana întîia din dreapta s-au scris valorile primului membru al implicației; în linia de sus s-au scris valorile membrului al doilea; la intersecția liniei cu coloana respectivă se găsește valoarea de adevăr respectivă a implicației C. De exemplu:

$$\frac{C \mid 0}{0 \mid 1}$$

înseamnă: implicația (C) este adevărată pentru primul membru fals și al doilea fals.

Iată matricea completă[13]:

C	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

[13] Această matrice poate fi scrisă utilizînd în locul semnelor 0, 1/2, 1 literele inițiale F, P, A ale cuvintelor „Fals", „Posibil" și „Adevărat", astfel:

C	F	P	A
F	A	A	A
P	P	A	A
A	F	P	A

Ce spune această matrice care a făcut să intervină și valoarea a treia „posibil" (1/2) a propozițiilor? Pentru valorile 0 și 1 ale membrilor, implicația are valoarea corespunzătoare din logica lui Russell, adică este adevărată cu excepția cazului cînd prima propoziție este adevărată și a doua falsă. Să cercetăm acum cazurile în care intră 1/2 (posibilul). Dacă primul membru este posibil (1/2) și al doilea este fals, implicația are valoarea 1/2 (este posibilă); dacă primul membru este posibil (1/2) și al doilea este posibil (1/2), atunci implicația este adevărată (1) etc.

* 5.8. Definiția noțiunii de posibilitate

Pe baza acestor concluzii, Łukasiewicz caută o definiție a posibilității. Această definiție a fost găsită de elevul lui Łukasiewicz, Alfred Tarski (în anul 1921), și este definiția posibilității în general, corespunzînd celor trei propoziții modale primitive. Această definiție este:

D2. $Mp = CNpp$

„*p* este posibil" înseamnă același lucru cu „dacă non-*p* atunci *p*"[14].

Expresia „*CNpp*", care definește posibilitatea unei propoziții *p*, este conform matricei, numai atunci falsă cînd *p* este fals; în toate celelalte cazuri expresia este adevărată. Avem astfel:

$$M0 = 0,\ M\frac{1}{2} = 1,\ M1 = 1$$

[14] **J. Łukasiewicz**, *op. cit.*, p. 66.

Adică: posibilitatea falsului este falsă; posibilitatea posibilității este adevărată; posibilitatea adevărului este adevărată.

Trebuie să observăm că în calculul bivalent expresia „*CNpp*" este echivalentă cu *p*; prin urmare valoarea ei este ca și a lui *p*. Nu același lucru se întîmplă în calculul trivalent, unde avem în plus cazul $M\ 1/2 = 1$.

Astfel, teza bivalentă „*CCNppp*", în calculul trivalent, nu este valabilă pentru valoarea logică 1/2 a lui *p*, cum ușor ne putem convinge. Într-adevăr, această propoziție este teorema 2.18 din *Principia Mathematica*:

$$\vdash : \sim p \supset p . \supset . p$$

Ea este un caz particular al reducerii la absurd *(reductio ad absurdum)*: „Dacă o propoziție urmează din ipoteza propriei ei falsități, atunci ea este adevărată".

Girolamo Saccheri, care s-a ocupat de această propoziție, încercînd să demonstreze cu ea postulatul lui Euclid, o numește *prima veritas*. Łukasiewicz o denumește după cercurile iezuite, care au cercetat-o mai de aproape, *consequentia mirabilis*. Este interesant faptul că acest mod de deducție nu este valabil întotdeauna în logica trivalentă.

Să definim acum și necesitatea, după Łukasiewicz:

$$D3 \quad NMNp = NCpNp$$

„*p* este necesar" înseamnă același lucru ca „nu este adevărat că dacă *p* atunci non-*p*".

Cu alte cuvinte, o propoziție este necesară numai atunci cînd este fals că ea implică propria ei negație[15].

---

[15] *Ibid.*

Este posibil însă să luăm o altă definiție pentru posibilitate? Tarski a arătat că singura definiție posibilă a posibilității este

$$CNpp^{16}$$

* 5.9. Consecințele definiției conceptului de posibilitate

Vom arăta în baza definiției dată conceptului de posibilitate că în logica trivalentă cele trei propoziții modale primitive I, II și III, analizate în paragrafele anterioare, sînt simultan adevărate și deci compatibile.

Pentru aceasta însă, în prealabil, sînt necesare cîteva precizări. Am văzut (* 3.14) că interpretînd formulele calculului propozițional bivalent ca pe niște funcții de adevăr, teoremele apăreau ca acele funcții particulare (numite și tautologii) care pentru orice valori date variabilelor iau valoarea 1 (adevărat). Dar faptul că iau în mod constant valoarea 1 poate constitui chiar o demonstrație a lor. Este indiferent din punct de vedere al calculului — și aceasta este o observație importantă — dacă el se dezvoltă pornind de la axiome *(metoda axiomatică)* sau dacă teoremele sînt inserate pe baza dovezii că sînt tautologii. (Dovada, după cum am văzut, se face alcătuind matricea de adevăr a formulei, fapt pentru care metoda se numește *matricială.)* Łukasiewicz își alege ca mod de dezvoltare a sistemului său *metoda matricială*. Prin urmare orice teoremă trebuie însoțită, drept demonstrație, de un tabel în care se dă, pentru fiecare sistem de valori posibile luate de variabilele sale propoziționale,

[16] La începutul cercetărilor sale, Łukasiewicz luase ca definiție a posibilității pure formula:

D*1. $Mp = AEpNp\Pi qNCpKqNq$

unde functorii A și E înseamnă A = disjuncția logică, E = echivalența logică. Ea se traduce: „p este posibil" înseamnă „sau p și non-p sînt echivalente sau nu există o pereche de propoziții contradictorii care rezultă din p". Łukasiewicz a renunțat însă la D*1 pentru a adopta definiția lui Tarski.

valoarea corespunzătoare calculată pe baza matricelor trivalente ale implicației și negației. Spre exemplu, teorema *CpMp*. Pentru a calcula valoarea acestei formule pentru o valoare a lui *p*, trebuie să înlocuim mai întîi *Mp*, pe baza definiției sale, cu *CNpp* și obținem *CpCNpp*. Atunci pentru *p*, de pildă egal cu 1/2, *Np* va fi egal tot cu 1/2, deci *CNpp* va fi $C\frac{1}{2}\frac{1}{2}$, adică 1, iar *CpCNpp* va fi $C\frac{1}{2}1$, deci tot 1. Calculînd așa pentru fiecare valoare posibilă a lui *p*, trecem rezultatele în următorul tabel:

p	*CNpp*	*CpCNpp*
0	0	1
$\frac{1}{2}$	1	1
1	1	1

care ne arată că formula ia întotdeauna valoarea 1 (adevărat), deci este o tautologie și prin urmare o teoremă.

Asemenea verificări fiind simple și mecanice, le vom omite.

Astfel, teoreme ale logicii trivalente sînt următoarele:

T1 *CpCqp*

T2 *CpCNpp*

T3 *CpMp*

T4 *CCpqCNqNp*,

care este principiul transpoziției.

T5 *CNMpNp*,

care este propoziția modală primitivă I.

T6 *CNpCNpNMp*

T7 *CpCpNMNp*

Teorema 6 afirmă: „Dacă Np, atunci Np implică imposibilitatea lui p", iar 7: „Dacă p, atunci p implică necesitatea lui p". Ele sînt forme ale propoziției modale primitive II. Să observăm, odată cu Bernays[17], dublarea antecedentului față de propozițiile 2, respectiv 14, formele bivalente ale aceleiași propoziții modale. În logica bivalentă, pe care o acceptasem la începutul acestui capitol, cele două forme — cu antecedent simplu și cu antecedent dublu — erau echivalente. În logica trivalentă însă are loc implicația

T8 $CCpqCpCpq$,

dar nu și conversa ei. Prin urmare nu ne este indiferentă distincția. Și, într-adevăr, formulele cu antecedent simplu:

$$CNpNMp$$

$$CpNMNp$$

nu sînt teoreme, luînd fiecare pentru $p = 1/2$ valoarea $1/2$.

Pentru a arăta că și propoziția III este valabilă în logica trivalentă, trebuie să introducem în acest calcul disjuncția și conjuncția logică notate de Łukasiewicz prin A și respectiv K. Aceste definiții sînt:

D4 $Apq = CCpqq$

D5 $Kpq = NANpNq$

Ca și în logica bivalentă, Apq se va citi „p sau q", iar Kpq „p și q".

Atunci este ușor de verificat că și formulele

T9 $\Sigma pKMpMNp$

T10 $N\Pi pNKMpMNp$,

care exprimă din punct de vedere formal propoziția III, sînt teoreme în logica trivalentă. Spre exemplu, prima

[17] *Les entretiens de Zürich...*, p. 104.

este teoremă, deoarece există un p astfel încît atît Mp cît și MNp să ia valoarea 1 și anume $p = 1/2$.

Așadar, toate cele trei propoziții modale primitive sînt aici valabile și deci compatibile.

Să facem acum dovada că definiția „$Mp = CNpp$" este singura care satisface propozițiile modale primitive I, II și III.

Fie α o propoziție sau o expresie mai complicată. După I, din „$NM\alpha$" urmează „$N\alpha$". Prin transpoziție, din α urmează $M\alpha$. Acest rezultat poate fi ușor constatat:

$$\alpha = 1;\ M\alpha = M1 = 1;\ M1 = 1.$$

După propoziția II, din „$N\alpha$" urmează „$NM\alpha$". Dacă $\alpha = 0$, atunci:

$$N\alpha = 1;\ NM\alpha = NM0 = 1.$$

Dar $NM0$ poate fi 1 numai dacă $M0 = 0$. Căpătăm, așadar, o nouă egalitate:

$$M0 = 0$$

În sfîrșit, propoziția III, $\Sigma pKMpMNp$, este falsă pentru $p = 0$ și $p = 1$, fiindcă în cazul acesta unul din membrii conjuncției este fals, deci întreaga conjuncție este falsă.

Conjuncția aceasta devine adevărată dacă luăm:

$$M\frac{1}{2} = 1,$$

căci atunci, pentru $p = 1/2$, ea are valoarea 1.

Cele trei propoziții, I, II și III, nu sînt verificate decît dacă luăm:

$$M1 = 1;\ M0 = 0;\ M\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Însă aceste valori sînt tocmai acelea date de definiția „$Mp = CNpp$"; deci ea verifică propozițiile I, II, III sau o expresie echivalentă.

* 5.10. Dezvoltarea logicii trivalente

Lista de teoreme ale logicii trivalente începută în paragraful anterior poate fi completată cu cîteva proprietăți importante ale implicației definite de Łukasiewicz[18], și anume:

T11 Cpp (legea identității)

T12 $CCpCqrCqCpr$ (principiul comutativ)

T13 $CCpqCCqrCpr$

T14 $CCqrCCpqCpr$,

ultimele fiind cele două forme ale principiului silogismului.

Mai departe, alături de prima proprietate paradoxală a implicației materiale

$$p \cdot \supset \cdot q \supset p,$$

care am văzut că are loc și pentru implicația lui Łukasiewicz (T1), a doua este, de asemenea și ea, valabilă:

T15 $CNpCpq$

O propoziție falsă implică orice.

Ca și în logica bivalentă, vom putea defini echivalența a două propoziții p și q ca implicația lor reciprocă. Notînd-o cu E, avem:

D6 $Epq = KCpqCqp$,

din care putem deduce imediat că are loc principiul dublei negații

T16 $EpNNp$

---

[18] După cum a observat Gr. C. Moisil, care s-a ocupat și de posibilitatea definirii unor alte implicații în logica trivalentă, „implicația łukasiewiczeană se bucură de cele mai multe dintre proprietățile tipice ale implicației". (**Gr. C. Moisil,** *Încercări vechi și noi de logică neclasică*, p. 284.)

După cum s-a văzut o serie de teze ale logicii bivalente au loc și în cea trivalentă. Există, desigur, și exemple contrare, întrucît cele două logici sînt distincte.

Se poate arăta ușor că nici o tautologie a logicii bivalente nu va căpăta valoarea fals (0) în logica trivalentă, oricare ar fi valorile de adevăr luate de variabilele sale propoziționale. Prin urmare nici o asemenea tautologie nu va putea deveni, în logica lui Łukasiewicz, o *contradicție* (adică o formulă care să ia în mod constant valoarea 0). Totuși putem observa, privind matricele trivalente ale functorilor N, A și K, că formulele în a căror componență intră numai ei iau valoarea 1/2 cînd toate variabilele lor propoziționale iau această valoare. Prin urmare, dacă au fost în logica bivalentă tautologii, acum nu mai sînt.

Astfel, principiul terțiului exclus

$$ApNp$$

nu mai este valabil în logica trivalentă. Era și de așteptat, căci el spune că orice propoziție este adevărată sau falsă. Un postulat pe care, evident, nici o logică cu mai multe valori nu-l acceptă. Locul lui îl ia, după cum vom vedea, un principiu al quartului exclus: orice propoziție poate avea trei valori: 0, 1/2 sau 1, *quartum non datur*.

Ceea ce este mai curios, nici principiul contradicției

$$NKpNp$$

nu este o tautologie $\left(\text{pentru } p = \frac{1}{2} \text{ el capătă valoarea } \frac{1}{2}\right)$. Cum bine s-a observat însă, lipsa lui de valabilitate nu mai ține de punctul de vedere polivalent, ci trebuie privită mai curînd drept o mutilare a conjuncției de sensul ei obișnuit[19]. Este evident că și în logica trivalentă, ca și în cea bivalentă, o propoziție p nu poate lua simultan două valori de adevăr. Relativ la aceasta, F. Gonseth punea în evidență valoarea 1/2 pe care ar trebui s-o ia conjuncția: „De acum într-un an voi fi la Varșovia și nu voi fi la Varșovia" dacă propozițiile referitoare la viitorii

[19] *Les entretiens de Zürich...*, p. 105, notă.

contingenți ca „De acum într-un an voi fi la Varșovia" sînt considerate ca avînd valoarea 1/2. Aceasta, după părerea lui Mostowski, distruge orice speranță de a da o interpretare rezonabilă logicii łukasiewicziene în termenii limbajului obișnuit[20]. Vom vedea cum asemenea dificultăți se ivesc în orice logică trivalentă, ca de altfel și în logicile cu mai mult de trei valori.

* 5.11. Modalitățile logicii trivalente

Vom relua acum discuția modalităților în sistemul trivalent al lui Łukasiewicz. Pentru aceasta să introducem mai întîi, o dată cu Lewis[21], o nouă modalitate a propozițiilor, care din motive pe care le vom vedea mai tîrziu este interpretată de el ca „dubitativul" *(doubtful)* și notată cu D:

D7 $Dp = EpNp$

Atunci vom avea, pe lîngă adevăr și fals: p și Np, șase modalități: Mp, NMp, MNp, $NMNp$, Dp și NDp, ale căror matrice de adevăr le putem calcula imediat, obținînd

p	Np	Mp	NMp	MNp	$NMNp$	Dp	NDp
0	1	0	1	1	0	0	1
1/2	1/2	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1

(1) Mp este modalitatea care are loc în afara cazului cînd $p = 0$.

Deci semnificația ei exactă este $p \neq 0$ sau „p nu este cu siguranță fals".

[20] „Journal of Symbolic Logic", XV (1950), p. 223.
[21] **C. I. Lewis** și **C. H. Langford**, *Symbolic Logic*, p. 225.

(2) NMp este modalitatea care are loc exact cînd $p = 0$. Deci semnificaţia ei exactă este $p = 0$ sau „p este cu siguranţă fals".

(3) MNp este modalitatea care are loc cu excepţia cazului $p = 1$.
Deci semnificaţia ei exactă este $p \neq 1$ sau „p nu este cu siguranţă adevărat".

(4) $NMNp$ este modalitatea ce are loc exact cînd $p = 1$. Deci semnificaţia ei exactă este $p = 1$ sau „p este cu siguranţă[22] adevărat".

(5) Dp este modalitatea care are loc exact cînd $p = 1/2$. Deci semnificaţia ei exactă este $p = 1/2$ sau „p este dubitativ (nici cu siguranţă adevărat, nici cu siguranţă fals)".

De altfel ea este echivalentă cu conjuncţia: $KMpMNp$ (atît p cît şi Np sînt posibile), ceea ce îl face pe Prior s-o identifice cu „contingentul"[23].

(6) NDp este modalitatea care are loc cu excepţia cazului $p = 1/2$.
Deci semnificaţia ei exactă este $p \neq 1/2$ sau „p nu e dubitativ".

Observăm că toate aceste şase funcţii de adevăr pot lua doar două valori, adevărul (1) şi falsul (0), spre deosebire de primele două „p şi Np", care iau şi valoarea 1/2. Prin urmare, propoziţia p şi propoziţia $p = 1$ sînt distincte. Dar *afirmarea* lui p este echivalentă cu $p = 1$. Se confirmă, aşadar, observaţia făcută de noi în primul paragraf, că toate aceste moduri nu trebuie considerate aserţiuni, ci doar propoziţii ipotetice.

Cît priveşte relaţiile dintre modalităţi, între ele au loc implicaţiile obişnuite din logica modală între „necesar", „adevărat" şi „posibil", ca şi între „imposibil", „fals" şi „posibil fals". Notînd aceste implicaţii prin săgeţi, relaţiile se pot scrie schematic astfel:

---

[22] Lewis observă că aici, ca şi în toate celelalte cinci cazuri, „cu siguranţă" nu înseamnă o certitudine psihologică, ci are exact înţelesul lui $p = 1$ din calculul probabilităţilor (*Ibidem*, p. 226).

[23] **A. N. Prior,** *Formal Logic*, p. 247.

$$NMNp \to p \to Mp$$
$$NMp \to Mp \to MNp$$

Modalitatea „dubitativ", Dp, nu este implicată de nici una din celelalte modalități, dar implică modalitățile Mp și MNp, așa cum se poate constata din teoremele:

T17 $CDpMp$

T18 $CDpMNp$

În plus ea are proprietățile:

T19 $EDpDNp$

„dubitativitatea lui p echivalează cu dubitativitatea lui Np";

T20 $ENDpNDNp$

„nedubitativitatea lui p echivalează cu nedubitativitatea lui Np", așa cum ușor se poate verifica.

Cu ajutorul acestei modalități, putem exprima principiul quartului exclus, despre care am afirmat că este valabil în logica trivalentă. Prin analogie cu principiul terțiului exclus sau — așa cum îl mai numește Łukasiewicz — al celor două valori, care afirmă că orice propoziție poate lua numai două valori: adevărul și falsul, putem pune pentru logica trivalentă un principiu al celor trei valori: orice propoziție poate lua trei valori, adevărul (1), falsul (0) și valoarea 1/2, *quartum non datur*. Ceea ce în simbolismul łukasiewiczian, utilizînd modalitățile anterior definite, s-ar scrie astfel

T21 $AANMNpDpNMp$

„Orice propoziție p admite sau modalitatea *necesar*, sau *dubitativ*, sau *imposibil*", căci $NMNp$, Dp, NMp înseamnă, după cum am văzut, respectiv $p = 1$, $p = 1/2$ și $p = 0$. Această teză a logicii cu trei valori este numită de Moisil *principiul quartului exclus*[24].

[24] **Gr. C. Moisil**, *Încercări vechi și noi*..., p. 184, unde autorul îl exprimă sub o formă algebrică, echivalentă însă cu cea dată de noi.

Am văzut care este modul aparte în care Łukasiewicz își dezvoltă sistemul: metoda matricelor de adevăr. Se pune problema dacă nu poate fi dezvoltat și așa cum ne-am obișnuit pînă acum, adică deducîndu-i teoremele din niște axiome, prin regulile familiare de inferență din calculul logic: substituția și *modus ponens*.

Wajsberg, un elev al lui Łukasiewicz, a arătat că acest lucru este posibil dacă pornim de la următoarele patru axiome:

A1 $CqCpq$

„o propoziție adevărată e implicată de orice propoziție".

A2 $CCpqCqrCpr$

care este unul dintre principiile silogismului,

A3 $CCCpNppp$

A4 $CCNqNpCpq$

regula de transpoziție.

Într-adevăr, să arătăm cum, spre exemplu, se pot demonstra pe baza acestor axiome și a regulilor de substituție și *modus ponens*, primele trei teoreme enunțate de noi la paragraful precedent (modul lui Łukasiewicz de a indica demonstrațiile ne este familiar încă de la * 5.4)

A1 p/q, $q/p \times$ T1

T1 $CpCqp$

T1 $q/Np \times$ T2

T2 $CpCNpp$

T2 D2 $\times$ T3

T3 $CpMp$

Pentru demonstrarea teoremelor cu cuantificatori este necesară, așa cum am menționat, regula de adăugare a cuantificatorului (* 5.5).

Observăm că toate cele patru axiome sînt teoreme ale logicii clasice. Prin urmare, utilizînd numai substituția

și *modus ponens*, nu vom putea demonstra în logica lui Łukasiewicz decît teoreme ale logicii clasice, dar nu pe toate. Spre exemplu, după cum am observat, principiul terțiului exclus $ApNp$ nu poate fi demonstrat*. Deci logica trivalentă, abstracție făcînd de interpretarea sa trivalentă, poate fi privită ca un fragment al logicii clasice.

Dacă luăm însă în considerare interpretarea trivalentă, vom vedea că există deosebiri esențiale între cele două logici, care nu justifică această incluziune simplificatoare.

Pe scurt, despre ce este vorba? Întrucît combinațiile ce se pot forma cu cele două valori de adevăr, 1 și 0, luate cîte două, sînt (1,1), (1,0), (0,1) și (0,0), în logica bivalentă le corespund patru functori unari: tautologia, adevărul, falsul (negația) și contradicția. Toți se pot exprima cu ajutorul ideilor primitive puse de Russell la baza sistemului său: tautologia lui p prin $p \vee \sim p$, adevărul lui p prin p, falsitatea lui p prin $\sim p$, iar contradicția lui p prin $p. \sim p$ sau $\sim (p \vee \sim p)$.

În logica trivalentă însă avem dintr-o dată $3^3 = 27$ functori unari. Unii dintre ei nu pot fi exprimați cu ajutorul implicației și negației trivalente. Spre exemplu functorul Tp, definit de matricea:

$$\begin{array}{c|ccc} p & 0 & 1/2 & 1 \\ \hline T & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array},$$

nu poate fi scris în funcție doar de C și N. Slupecki, unul dintre elevii lui Łukasiewicz, a propus să-l luăm împreună cu aceștia drept functor primitiv. În plus, pentru calculul cu T, trebuie adăugate celor patru axiome ale lui Wajsberg încă două:

A5 $CTpNTp$

A6 $CNTpTp$

---

* Faptul că nu toate principiile logicii clasice ne sînt accesibile în logica trivalentă îngreuiază mult demonstrațiile unor teoreme (pentru exemplificare vezi **R. Ackermann**, *Introduction to Many-Valued Logics*, pp. 50—53). În asemenea cazuri, e de preferat verificarea faptului că o teoremă are loc prin construirea matricei trivalente.

Sistemul astfel lărgit nu mai prezintă carențe de tipul celor menționate. Din păcate însă noul functor introdus nu are nici o semnificație intuitivă[25].

Logicianul chinez Tzu-Hua Hoo a demonstrat că logica bivalentă, despre care am văzut mai înainte că „includea" logica lui Łukasiewicz, se poate considera „inclusă" în logica trivalentă, îmbogățită cu functorul T și cele două axiome A5 și A6, cu condiția de a interpreta negația și implicația clasică respectiv prin definițiile[26]

$$\sim p = CTpNp \qquad Df.$$

$$p \supset q = CNqNp \qquad Df.$$

* 5.12. Generalizarea logicii trivalente: logicile L_m

Am văzut că în logica trivalentă s-au atribuit propozițiilor trei valori: 0, 1/2 și 1. Putem generaliza această idee și să atribuim, în intervalul 0 (fals) și 1 (adevărat), o serie de valori propozițiilor: patru, cinci etc., obținînd o logică tetravalentă, pentavalentă etc.

Cît privește implicația și negația, într-o astfel de logică ele vor putea fi definite în felul următor. Să observăm, privind matricea implicației trivalente (* 5.7), că în toate cazurile cînd valoarea lui p este mai mică sau cel

---

[25] Cu privire la aceasta, a se vedea interesante discuții în *Les entretiens de Zürich*, p. 103.

De altfel, utilizarea functorului T nu reprezintă singura posibilitate de rezolvare a problemei. Chiar Slupecki a mai propus ulterior încă una (vedeți **A. N. Prior**, *Formal Logic*, p. 237). Contribuțiile lui **Slupecki** au apărut în „Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie", Classe III, v. 29 (1936), pp. 9—11 și v. 32 (1939), pp. 102—128.

[26] *m-valued sub-systems of (m + n) — valued propositional calculus*, „Journal of Symbolic Logic", XIV (1949), pp. 177—181, în care **Hoo** demonstrează de fapt un rezultat mai general, al cărui caz particular este cel despre care am vorbit.

mult egală cu valoarea lui q implicația Cpq are loc (ia valoarea 1), iar cînd valoarea lui p este mai mare decît valoarea lui q ea are exact valoarea $1 - p + q$ (și deci nu mai are loc). Pe de altă parte este ușor de văzut că negația lui p, Np, are întotdeauna valoarea $1 - p$.

Așadar, însemnînd cele m valori ale unei logici m-valente prin numerele:

$$0, \frac{1}{m-1}, \quad \frac{2}{m-1}, \quad \ldots, \quad \frac{m-2}{m-1}, 1,$$

vom putea defini implicația a două propoziții p și q, Cpq, astfel:

pentru $p \leqslant q$: Cpq ia valoarea 1 (este adevărată, deci are loc);

pentru $p > q$: Cpq ia valoarea $1 - p + q$ (deci nu are loc).

În felul acesta, utilizînd metoda matricelor de adevăr, se poate dezvolta un calcul m-valent, L_m, respectiv cu 4, 5 ș.a.m.d. valori de adevăr. Ba, mai mult, nimic nu ne împiedică să luăm drept valoare de adevăr a unei propoziții orice fracție rațională mai mare ca 0, dar mai mică ca 1, și să punem astfel bazele unei logici cu o infinitate de valori. Łukasiewicz considera importantă o asemenea logică, datorită posibilității ei de aplicare în calculul probabilităților.

În toate aceste sisteme se pot defini, ca și în logica cu trei valori, disjuncția, conjuncția și echivalența:

$$Apq = CCpqq \qquad Df.$$

$$Kpq = NANpNq \qquad Df.$$

$$Epq = KCpqCqp \qquad Df.$$

Astfel sînt păstrate o parte dintre proprietățile disjuncției și conjuncției din logica clasică (comutativitatea, asociativitatea etc.).

Este interesant de observat legăturile pe care aceste logici le au între ele. Toate teoremele unei logici polivalente sînt valabile în logica bivalentă, dar niciodată reciproc. Cele mai importante teze ale sistemului bivalent care nu sînt valabile în sistemele polivalente, sînt cele

care se referă la unele moduri de deducție numite *apagogice* și considerate, încă de mult, discutabile. Iată cîteva exemple, care nu sînt valabile în logicile polivalente:

$$CCNppp$$

$$CCpNpNp$$

$$|CCpqCCpNqNp$$

$$CCpKqNqNp$$

$$CCpEqNqNp$$

Cît privește incluziunile logicilor polivalente între ele, menționăm că aceasta este o problemă delicată. Deși, într-un anumit sens, cu cît m crește, mulțimea teoremelor lui L_m scade, în general nu avem relația „L_n este inclus în L_m" pentru orice $n > m$[27]. Logica cu o infinitate de valori este un caz-limită, teoremele ei fiind valabile în oricare dintre logicile cu un număr finit de valori.

Ca în cazul logicii trivalente și pentru celelalte logici polivalente s-au căutat sisteme de axiome din care să se poată deduce prin substituție și *modus ponens* exact acele teoreme pe care logica respectivă le certifică drept valabile (a căror matrice de adevăr m-valentă, m fiind numărul valorilor de adevăr din logica respectivă, are pe ultima coloană numai elemente 1). Mai întîi, evident, ne putem pune problema dacă acest lucru este posibil în general. Nu cumva există logici polivalente care să nu poată fi dezvoltate, plecînd de la un număr finit de axiome?

Wajsberg[28] a demonstrat că orice asemenea logică cu un număr finit de valori în care sînt valabile teoremele:

$$CCpqCCqrCpr$$

$$CCqrCCpqCpr$$

---

[27] Aceasta are loc numai cînd există un întreg pozitiv k, astfel încît $k\ (m-1) = n-1$ (vezi **R. Ackermann**, *op. cit.*, p. 60).

[28] **M. Wajsberg**, *Beiträge zum Metaaussagenkalkül*, I, în „Monatshefte für Mathematik und Phys.", 42 (1935), pp. 221—242.

$$CCqrCpp$$

$$CCpqCNqNp$$

$$CNqCCpqNp$$

poate fi axiomatizată pornind de la un număr finit de axiome. Se poate arăta că formulele de mai sus sînt valabile în orice logică L_m. Nu ne rămîne, prin urmare, decît să găsim, pentru fiecare dintre acestea, sistemul potrivit de axiome.

O metodă generală a fost dezvoltată de Rosser și Turquette[29] prin introducerea unor funcții speciale de adevăr. Să presupunem că ne aflăm într-o logică cu m valori de adevăr, și anume:

$$0, \frac{1}{m-1}, \frac{2}{m-1}, \ldots, \frac{m-2}{m-1}, 1$$

Vom considera functorul unar $J_{\frac{i}{m-1}}\, p$, care ia valoarea 1 (adevărat) exact atunci cînd $p = \frac{i}{m-1}$, iar în rest 0. În L_m se pot defini m asemenea functori: J_0, $J_{\frac{1}{m-1}}$, $J_{\frac{2}{m-1}} \ldots$ $\ldots J_{\frac{m-2}{m-1}}$, J_1. (În L_3 trei functori J care coincid conform tabelului de la pagina 184 cu următoarele modalități: $J_0 p$ cu NMp sau imposibilitatea lui p, $J_{\frac{1}{2}}\, p$ cu Dp sau dubitativitatea lui p, $J_1 p$ cu $NMNp$ sau necesitatea lui p.) Aceștia pot fi exprimați, am văzut în logica trivalentă, cu ajutorul lui C și N. Operația însă poate fi făcută în orice logică L_m [30].

Să urmărim acum modul în care, cu ajutorul funcțiilor J, poate fi axiomatizată oricare dintre aceste logici.

[29] **J. B. Rosser** și **A. R. Turquette**, *Many-Valued Logics*, Amsterdam, 1952, pp. 16—23.

[30] Aceasta rezultă, în lucrarea lui Rosser și Turquette, din însuși modul în care ei definesc funcțiile J (*Ibidem*, pp. 18—22).

Lista axiomelor începe, pentru oricare dintre ele, cu următoarele trei postulate:

I $CqCpq$

adevărul este implicat de orice.

II $CCpCqrCqCpr$

III $CCpqCCqrCpr$

Ele sînt valabile în toate logicile L_m, chiar și în cea cu o infinitate de valori.

În continuare, sistemul de axiome se particularizează potrivit logicii pentru care este construit. Întrucît axiomele pot deveni destul de complicate (deși principiul după care sînt construite rămîne simplu), noi vom trata doar cazul logicii trivalente. Pe baza lui, cititorul poate găsi apoi ușor modul de generalizare la oricare alt caz.

Așadar, pentru logica trivalentă, următoarele două postulate sînt:

V $CCJ_1pqCCJ_{\frac{1}{2}}pqCCJ_0pqq$

VI CJ_1pp

Primul dintre ele afirmă că dacă propoziția q se poate deduce din p în toate cele trei cazuri în care aceasta din urmă se poate găsi — cînd ia valoarea 1 (deci J_1p este adevărată), cînd ia valoarea 1/2 (deci este adevărată $J_{\frac{1}{2}}p$), și cînd ia valoarea 0 (deci este adevărată J_0p)—, atunci q este adevărată[31]. Al doilea postulat este evident, ținînd seama de faptul că J_1p nu afirmă altceva decît adevărul lui p.

Următorul grup de axiome exprimă, cu ajutorul funcțiilor J, proprietățile caracteristice implicației și negației

[31] Să observăm că funcțiile J nu pot lua decît două valori, adevărul și falsul.

trivalente, așa cum rezultă ele din matricele de adevăr (* 5.7).

VIIa CJ_1pJ_0Np

VIIb $CJ_{\frac{1}{2}}pJ_{\frac{1}{2}}Np$

VIIc CJ_0pJ_1Np

Dacă p ia valoarea 1, atunci Np ia valoarea 0. Dacă p ia valoarea 1/2, atunci Np ia valoarea 1/2 etc.

VIId $CJ_1pCJ_1qJ_1Cpq$

VIIe $CJ_1pCJ_{\frac{1}{2}}qJ_{\frac{1}{2}}Cpq$

VIIf $CJ_1pCJ_0J_0qCpq$

VIIg $CJ_{\frac{1}{2}}pCJ_1qJ_1Cpq$

VIIh $CJ_{\frac{1}{2}}pCJ_{\frac{1}{2}}qJ_1Cpq$

VIIi $CJ_{\frac{1}{2}}pCJ_0pJ_{\frac{1}{2}}Cpq$

VIIj $CJ_0pCJ_1pqJ_1Cpq$

VIIk $CJ_0pCJ_{\frac{1}{2}}qJ_1Cpq$

VIIl $CJ_0pCJ_0qJ_1Cpq$

Dacă p ia valoarea 1 și dacă q ia valoarea 1, atunci Cpq ia valoarea 1 etc. Sînt exact proprietățile prin care Łukasiewicz își definise implicația sa trivalentă.

Am lăsat la urmă axiomele puse de Rosser și Turquette în fața celor dinainte. Ele exprimă unele cazuri speciale în care formula $CCpCpqCpq$ are loc.

După cum s-a observat în *5.9, această formulă nu e valabilă în logica trivalentă (nici în vreuna din logicile

polivalente L_m). Spre exemplu, în L_3, cînd $p = 1/2$ și $q = 0$, valoarea sa este 1/2. Dar cînd p și q iau numai valorile 1 și 0, întrucît formula este o teoremă a logicii bivalente, valoarea sa va fi constant egală cu 1. Funcțiile J nu iau decît aceste valori. Așadar, formulele care urmează sînt tautologii. Ele constituie axiomele de care am vorbit.

IVa $CCJ_1pCJ_1pqCJ_1pq$

IVb $CCJ_{\frac{1}{2}}pCJ_{\frac{1}{2}}pqCJ_{\frac{1}{2}}pq$

IVc $CCJ_0pCJ_0pqCJ_0pq$

Pe baza acestor postulate se poate, relativ ușor, arăta completitudinea sistemului, adică faptul că orice formulă care, calculată cu matricele trivalente ale lui Łukasiewicz, ia în mod constant valoarea 1 (este o tautologie), poate fi dedusă prin substituție și *modus ponens* din axiome[32]. Axiomatizarea logicii trivalente propusă de Wajsberg, deși mai simplă, ridica în calea unei asemenea demonstrații piedici importante.

Așa cum am spus și mai înainte, principiile care au stat la baza axiomatizării date de Rosser și Turquette sînt generale și ne dau posibilitatea să trecem cu ușurință de la logica trivalentă la o logică polivalentă oarecare, dar cu un număr finit de valori. Rămîne problema axiomatizării logicii cu o infinitate de valori. Łukasiewicz a enunțat ipoteza că și aceasta poate fi dedusă dintr-un număr finit de axiome, și anume axiomele A1 — A3, propuse de Wajsberg pentru logica trivalentă, precum și următoarele două:

$$CCCpqqCCqpp$$

$$CCCpqCqpCqp$$[33]

[32] Vedeți **Rosser** și **Turquette**, *op. cit.*, pp. 68—74.
[33] **A. Tarski**, *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford, 1956, p. 51.

Relativ recent s-a arătat că această ipoteză este adevărată[34].

În continuare, să punem în evidență, folosind funcțiile J, cîteva analogii între logica bivalentă și logicile polivalente L_m. Principiul terțiului exclus din logica bivalentă, care afirmă că orice propoziție este adevărată sau falsă, *tertium non datur*, i se substituie, într-o logică cu m valori, un principiu al $(m+1)$-lui exclus: orice propoziție poate lua valoarea 0 sau $\frac{1}{m-1}$ sau ... sau 1. Ceea ce, utilizînd simbolismul lui Łukasiewicz, precum și funcțiile J, s-ar scrie astfel:

$$A \ldots AAJ_0pJ_{\frac{1}{m-1}}p \ldots J_1p$$

Gr. C. Moisil a numit pe drept cuvînt acest principiu „al exhaustiunii"[35]. Este evident că logica cu o infinitate de valori este lipsită de un asemenea principiu.

Principiul contradicției putea fi enunțat în logica bivalentă sub forma: o propoziție nu poate fi în același timp adevărată și falsă. Dacă, urmînd pe Gr. C. Moisil, îl concepem ca pe un „principiu al unicității valorilor logice"[36], într-o logică cu m valori va trebui să-l înlocuim prin mai multe enunțuri. Și anume, pentru fiecare pereche de valori distincte k și l cîte un enunț care afirmă „o propoziție p nu poate lua simultan valorile de adevăr k și l"; în simbolismul łukasiewiczian:

$$NKJ_kpJ_lp$$

Aceste analogii pot fi împinse și mai departe, dar nu este cazul s-o facem aici. Ele dovedesc o legătură strînsă între sistemele polivalente și calculul bivalent prin generalizarea căruia au luat naștere.

---

[34] **A. Rose** și **J. B. Rosser**, *Fragments of many-valued statement calculi*, în „Transactions of the American Mathematical Society", 87 (1958), pp. 1—53.

[35] **Gr. C. Moisil**, *Logica formală și problema ei actuală*, în *Istoria filozofiei moderne*, vol. IV, 1939 (sau *Încercări vechi și noi de logică neclasică*, p. 51).

[36] *Ibidem* (sau *Încercări vechi și noi...*, p. 55).

Sistemele polivalente au fost dezvoltate, pe de o parte, prin cuantificarea variabilelor propoziționale sub forma calculului propozițional extins[37], iar pe de altă parte, prin dezvoltarea unor calcule ale funcțiilor propoziționale, asemănătoare celui prezentat în capitolul 3 B, dar bazate pe calcule propoziționale polivalente.

Spre exemplificare, vom schița numai cum se poate construi un asemenea calcul al funcțiilor propoziționale pornind de la logica lui Łukasiewicz cu trei valori[38]. Pentru aceasta este suficient ca axiomelor logicii trivalente (celor patru propuse de Wajsberg sau celor 20 date de Rosser și Turquette) să li se adauge cele două axiome și două reguli despre care am văzut că sînt specifice calculului cu funcții clasic (*3.11). Acestea erau[39]:

$$(x) \,.\, \varphi x \,.\, \supset \,.\, \varphi y$$

$$\varphi y \,.\, \supset \,.\, (\exists\, x) \,.\, \varphi x$$

și regulile:

Din $A \supset B(x)$, unde x nu apare liber în A, deducem $A \supset (x)\ B\ (x)$.

Din $B(x) \supset A$, unde x nu apare liber în A, deducem $(\exists\, x)\, B\,(x) \supset A$.

Evident, pentru deducția teoremelor, în acest calcul trebuie, ca și în calculul dezvoltat în capitolul 3 B, lărgită corespunzător regula de substituție. Regula *modus ponens* rămîne aceeași. De asemenea, formula:

$$(x) \,.\, \varphi x \,.\supset .\ \ p : \supset \,.\, (\exists\, x).\ \varphi x \supset p$$

---

[37] **J. Łukasiewicz** și **A. Tarski,** *Untersuchungen über den Aussagenkalkül* (**A. Tarski,** *op. cit.*, p. 54).

[38] Bazele acestui gen de cercetări au fost puse de Rosser și Turquette în importanta lor lucrare *Many-Valued Logics*, pp. 48—108.

Noi însă vom urmări aici expunerea mai simplă dată de prof. Moisil pentru cazul logicii cu trei valori (*Sur la logique à trois valeurs de Łukasiewicz*, „Acta Logica", anul V, 1962).

[39] Vedeți această lucrare *3.11.

trebuie adăugată ca axiomă. În calculul de care ne ocupăm, ea nu poate fi obținută ca teoremă[40].

Functorul T al lui Slupecki poate fi introdus în calculul cu funcții ca și în cel propozițional, și anume, îmbogățind sistemul de axiome cu axiomele A5 și A6, așa cum am procedat și în calculul propozițional (*5.11) și în plus cu postulatul

$$(x) \,.\, T\varphi x \,.\equiv.\, T(x) \,.\, \varphi x$$

specific calculului cu funcții.

* 5.13. Alte cercetări

Ideea modificării logicii bivalente prin introducerea pentru propoziții a unor noi valori de adevăr în afara lui 1 (adevărul) și 0 (falsul) au avut-o mai întîi logicianul polonez J. Łukasiewicz și cel american E.L. Post. Independent, și la scurt timp unul după altul, ei au propus constituirea unor sisteme logice bazate pe o generalizare a ideii de funcție de adevăr[41]. Într-adevăr, ce ne împiedică ca, așa cum în logica lui Whitehead și Russell conectivele între propoziții erau considerate drept funcții de adevărul acestora, funcții care puteau lua două valori (cînd argumentele lor luau tot două valori), să privim aceste conec-

[40] În logica bivalentă, acest lucru era posibil; într-adevăr, formula de care ne ocupăm nu era altceva decît una din cele două implicații care formează echivalența 16b (vezi *3.12). Ceea ce nu trebuie să ne mire; acolo aveam la dispoziție pentru demonstrarea ei o serie de tautologii din calculul propozițional bivalent, care nu mai apar în logica trivalentă. Lipsa lor atrage după sine imposibilitatea deducerii teoremei 16b.

[41] Se pare că primatul descoperirii logicilor cu mai multe valori aparține lui Łukasiewicz, ale cărui idei în acest sens datează din 1918 (vezi **A. Mostowski,** *L'oeuvre scientifique de Jan Łukasiewicz dans le domaine de la logique mathématique*, în „Fundamenta Mathematicae", 44 (1967), pp. 1—11). Așezarea lor sistematică a făcut-o în 1920 în articolul *O logice trojwartościowej* („Ruch Filozoficzny", 5, pp. 169—171). Contribuția lui **Post** se află în *Introduction to a General Theory of Elementary Propositions*, în „American Journal of Mathematics", 43 (1921), pp. 163—185.

tive ca putînd lua trei sau mai multe valori cînd propozițiile ce le compun iau, la rîndul lor, mai mult de două valori? Dar și ce ne obligă s-o facem?

Łukasiewicz, după cum am văzut, își constituia logica sa trivalentă pornind de la considerente de ordin filozofic. El o substituie celei bivalente în domeniile în care aceasta din urmă nu mai este adecvată. (Cum este, spre exemplu, cel al gîndirii modale.)

Dimpotrivă, Post, plecînd de pe pozițiile matematicianului, considera că logica poate fi redusă la anumite reguli mecanice. În aceste condiții, putem schimba după plac aceste reguli. De fapt iată ce scria el: „Nu știm dacă aceste logici «ne-aristotelice» și dezvoltarea generală pe care o implică vor avea o aplicație directă; dar credem că în măsura în care teoria propozițiilor elementare (calculul propozițional — *n.n.*) stă la baza sistemului complet din *Principia*, această perspectivă lărgită asupra teoriei ne va pregăti pentru o analiză similară a acelui sistem, și deci în ultima instanță a matematicilor"[42].

Post a studiat în articolul său sisteme cu un număr oarecare, finit de valori. Aceeași generalizare, de la trei la mai multe valori, este făcută de Łukasiewicz și de elevul său, Tarski, într-un articol din 1930[43]. Ba, mai mult, ei împing generalizarea pînă la a considera un sistem în care propozițiile să poată lua o infinitate de valori de adevăr. Łukasiewicz considera o astfel de logică legitimă pentru posibilitatea pe care ar avea-o de a fi aplicată în calculul probabilităților. Încercarea unei asemenea aplicări a fost făcută de un alt elev al lui Łukasiewicz, Z. Zawirski[44]. De altfel întreaga școală de logică poloneză și-a adus în acest domeniu o contribuție substanțială. Am menționat deja în cursul acestui capitol rezultatele

[42] **E. L. Post**, *op. cit.*, p. 104.

[43] *Untersuchungen über den Aussagenkalkül*, în „Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie", Classe III, 23 (1930), pp. 1—21, 30—50.

[44] **Z. Zawirski**, *Semnificația logicii polivalente pentru cunoaștere și legătura sa cu calculul probabilităților*, (în poloneză), în „Przeglad Filozoficzny", 37 (1934), pp. 393—398 și *Über das Verhältnis mehrwertigen Logik zur Wahrscheinlichkeitsrechnung*, în „Studia Philosophica", 1 (1935), pp. 407—442.

obținute de M. Wajsberg cu privire la axiomatizarea sistemului trivalent al lui Łukasiewicz, precum și dezvoltarea acestui sistem de către J. Slupecki prin introducerea functorului T.

Alături de sistemele polivalente ale lui Łukasiewicz și Post au apărut o serie de alte asemenea sisteme. Astfel, în 1939, logicianul sovietic D.A. Bocivar propune un sistem trivalent pentru analiza paradoxelor logice[45]. Un sistem, de asemenea trivalent, propus în 1938 de S.C. Kleene[46], este utilizat de acesta în studiul funcțiilor parțial recursive. Łukasiewicz însuși studiază un sistem cu patru valori, îndeosebi pentru interpretarea lui modală[47].

Matricele de adevăr utilizate de Łukasiewicz în calculul trivalent (ca și în cel polivalent) sînt o generalizare a matricelor corespunzătoare din calculul bivalent (*3.3), în sensul că se reduc, cînd variabilele propoziționale iau doar valorile adevărat și fals, la acestea din urmă. Din această pricină ele se numesc *normale*. Dar, oricît ar părea de curios, s-au construit și sisteme ale căror matrice nu sînt normale (de exemplu sistemele construite de Post). A. Church a tratat sistematic aceste sisteme[48].

O altă linie de cercetări în logicile polivalente au constituit-o, așa cum am avut ocazia să menționăm, introducerea în calcul a funcțiilor propoziționale. Prima încercare de acest gen a fost făcută în 1939 de către J.B. Rosser[49], dar momentul important în această privință îl constituie

---

[45] *Asupra unui calcul trivalent și aplicațiile lui la analiza paradoxurilor calculului funcțional extins clasic* (în limba rusă), în „Matematiceskii sbornik", 4 (1939), pp. 353—369 și în limba română în Analele româno-sovietice, seria mat.-fiz., anul XV (1961), p. 200. Vedeți în această lucrare *9.5.

[46] **S. C. Kleene**, *On a Notation for Ordinal Numbers*, în „The Journal of Symbolic Logic", III (1938), pp. 332—340. Vedeți, de asemenea, *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam, Princeton, 1952, pp. 332—340, tot de același autor.

[47] *A System of Modal Logic*, în „Journal of Computing Systems", vol. I, nr. 3 (1953).

[48] **A. Church**, *Non-normal Truth-tables for the Propositional Calculus*, în „Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana", 10 (1953), pp. 41—42.

[49] *The Introduction of Quantification into a Three-Valued Logic*, rezumată în „The Journal of Symbolic Logic", IV (1939), pp. 170—171.

lucrarea *Many-Valued Logics* a lui Rosser și Turquette din 1952. O contribuție în această privință revine lui A. Mostowski[50].

Logicianul chinez Moh Shaw-Kwei a arătat posibilitatea construirii în sistemele cu mai multe valori a unor paradoxe asemănătoare celor din logica bivalentă (*3.13)[51].

Th. Skolem și C.C. Chang au studiat posibilitățile construirii unei teorii axiomatice a mulțimilor bazate pe o logică cu o infinitate de valori[52].

În sfîrșit, din punct de vedere filozofic, problema logicilor polivalente a fost pe larg discutată de către logicianul sovietic A.A. Zinoviev[53].

Structura algebrică a logicilor polivalente a fost studiată de numeroși logicieni și matematicieni. Una dintre contribuțiile de pionierat în acest domeniu aparține profesorului român Gr. C. Moisil[54]. El este creatorul așa-numitelor algebre Łukasiewicz. Numeroase contribuții în această privință, ca și în general în domeniul logicilor polivalente, a adus Alan Rose[55].

Problema aplicării logicilor cu mai multe valori o vom discuta pe larg în capitolul 9, iar cea a interpretării lor în capitolul 10.

---

[50] **A. Mostowski,** *Axiomatizability of Some Many-Valued Predicate Calculi*, în „Fundamenta Mathematicae", 50 (1961), pp. 165—190.

[51] Vedeți *9.5 din această lucrare.

[52] **Th. Skolem,** *Mengenlehre gegründet auf einer Logik mit unendlich vielen Wahrheitswerten* și **C. C. Chang,** *Infinite valued logic as a basis for set theory*, în „Logic, Methodology and Philosophy of Science". Proceedings of the 1964 International Congress, Amsterdam, 1965.

[53] **A. A. Zinoviev,** *Probleme filozofice ale logicii polivalente* (în limba rusă), Akad. Nauk SSSR, Institut Filozofii, Moskva, 1960 (trad. engleză 1963, trad. germană 1968).

[54] Primul său articol în această privință, *Recherches sur les logiques non-chrysippiennes* („Analles scientifiques de l'Université de Jassy", tome XXVI), a apărut în 1940.

[55] O listă completă a lor ar fi extrem de lungă, depășind spațiul afectat de noi acestei probleme. Menționăm totuși articolul scris în colaborare cu **J. B. Rosser,** *Fragments of Many-Valued Statement Calculi* („Transactions American Mathematical Society", 87, pp. 1—53).

* 5.14. Considerații generale

Łukasiewicz crede că această descoperire a logicilor polivalente se poate asemăna cu descoperirea geometriilor neeuclidiene. După cum s-au putut construi diverse geometrii renunțînd la postulatul lui Euclid, tot așa se pot construi mai multe logici — după cîte valori de adevăr considerăm pentru propoziții — abandonînd principiul terțiului exclus, după care o propoziție nu poate lua decît două valori, și anume: ori este adevărată, ori este falsă.

Łukasiewicz dă cîteva indicații istorice sumare, însă noi vom cerceta mai de aproape această chestiune.

Aristotel a susținut, destul de clar, valabilitatea principiului terțiului exclus față de propozițiile contradictorii. Dintre două (propoziții) contradictorii una este necesarmente adevărată, cealaltă falsă, nu există o posibilitate intermediară[56]. Cu toate acestea, s-ar părea că există, după el, așa cum am mai arătat în cursul lucrării, o excepție: propozițiile care se referă la viitorul contingent, cum sînt actele viitoare ale omului, care depind de liberul arbitru, nu pot fi declarate, în momentul cînd vorbim despre ele, adevărate sau false mai înainte ca ele să fi avut loc. Astfel de propoziții reprezintă numai posibilitatea. „Toate lucrurile care sînt numite posibile au contrariile lor de asemenea posibile"[57]. Vom da însă un pasaj din Aristotel care pune în adevărata ei lumină problema aceasta. Iată acest pasaj: „Dacă orice propoziție referitoare la viitor este adevărată sau falsă, este necesar pentru orice lucru ca el să se întîmple sau să nu se întîmple, căci, dacă cineva zice: cutare lucru va fi, și dacă altul îl neagă, este clar că este necesar că unul dintre ei spune adevărul, dacă orice afirmație sau negație este totdeauna sau adevărată sau falsă. Atunci nimic nu se întîmplă fortuit nici în chipul de a fi acesta sau aceea, nici ceea ce ar putea să fie și să nu fie, ci totul se întîmplă în mod necesar și nu într-un fel sau altul". Și mai departe: „Toate acestea nu sînt admisibile, căci recunoaștem că lucrurile care se vor întîmpla

[56] *Analytica posteriora*, 1, 2.
[57] *Metaphysica*, VIII, 9.

au ca început deliberările noastre și acțiunile noastre și că printre lucrurile care nu au existență actuală și permanentă sînt unele care pot să fie și să nu fie în mod egal, pentru care una sau alta (din eventualități) este posibilă, sau ca să fie sau ca să nu fie, că ele pot să se întîmple sau să nu se întîmple. Este deci adevărat că nu totul se întîmplă cu necesitate și că afirmația anticipată nu este mai adevărată decît negația"[58].

Se vede clar că această excepție la regula terțiului exclus este în strînsă legătură cu problema determinismului, care, dintr-o problemă psihologică, devine o problemă de logică.

Stoicii, dimpotrivă, erau determiniști *à outrance*.

Această atitudine era consecventă cu concepția pe care și-o făceau despre lume: nimic nu exista pentru ei decît în formă materială, iar materia este guvernată, după ei, de un determinism riguros. Chrysippos (282—209 î.e.n.), care este socotit ca al doilea fondator al școlii, a combătut cu înverșunare afirmația lui Aristotel privitoare la viitorul contingent, care admitea, cum am văzut, un liber arbitru. Fiind determiniști, stoicii căutau, prin diverse argumente, să infirme teza lui Aristotel asupra liberului arbitru. În afară de argumentul bazat pe legea cauzalității și acela care explică posibilitatea devinației, stoicii aduceau un argument logic, dezvoltat, în special, de Chrysippos, cum ne relatează Cicero. Dintre două propoziții contradictorii una este necesarmente adevărată. Deci dintre aceste două propoziții — „*a* va fi" și „*a* nu va fi" — necesitatea uneia, în momentul chiar în care vorbesc, exclude posibilitatea celeilalte: *ex omni aeternitate fluens veritas sempiterna*[59].

Pentru a lămuri concluzia aceasta, Chrysippos distingea două feluri de cauze: *causae principales* și *causae adjuvantes*. Pentru a arăta cum funcționează acest determinism, el dădea un exemplu cu ajutorul unui cilindru care se rostogolește pe un plan înclinat: trebuie un impuls pentru ca el să se rostogolească *(causae adjuvantes)*, dar el se

[58] *De Interpretatione*, IX.
[59] **Cicero**, *De Divinatione*, I, 55.

rostogolește în virtutea formei lui *(causae principales)*[60]. Chrysippos este, așadar, primul logician care susține stăruitor principiul terțiului exclus și astfel apare naturală denumirea pe care o dă Łukasiewicz logicilor polivalente de logici nechrysippiene[61].

În cele ce urmează ne vom rezuma la cîteva observații sumare asupra logicilor ne-chrysippiene.

Mai întîi, logica polivalentă a lui Łukasiewicz pleacă de la faptul că propozițiile modale primitive I, II, III sînt incompatibile în sistemul bivalent. Cu alte cuvinte, deoarece se ajunge la contradicții, trebuie să renunțăm la logica bivalentă, cum am văzut. Propoziția III, de pildă, ne-a condus la două teoreme contradictorii. În acest caz, dacă am fi aplicat un mod de raționament cunoscut, pe care l-am citat în cursul acestui capitol, anume:

$$CCpqCCpNqNp,$$

care spune că dacă dintr-o propoziție p se pot deriva două propoziții contradictorii, atunci ea este falsă, concluzia noastră ar fi trebuit să fie că propoziția III este falsă.

Să considerăm din nou propozițiile modale fundamentale. Acelea care conduc la rezultate penibile sînt propozițiile II și III.

Să ne referim chiar la propozițiile inițiale, de exemplu (d):

(d) „*Unumquodque, quando est, oportet esse*".

„Cînd ceva există, atunci cu necesitate există". Łukasiewicz dă cîteva exemple, care ar ilustra și evidența această propoziție. Un exemplu l-am citat atunci cînd am vorbit despre această aserțiune. Iată-l: „Nu este necesar să fiu acasă astă-seară, dar dacă sînt deja acasă astă-seară, atunci, cu această presupunere, este necesar că sînt acasă astă-seară". Este adevărată această propoziție? Sau, mai curînd, ce sens are ea? Mai întîi, cum admite însăși această

[60] **Cicero**, *De Fato*, 18.

[61] Pasajul următor din **Cicero** arată *(De Fato*, 10.21) mai bine vigoarea cu care apăra **Chrysippos** principiul despre care este vorba: „Chrysippos se temea că, dacă n-ar susține că tot ceea ce poate fi enunțat este adevărat sau fals, atunci nu putea să susțină că toate se întîmplă după destinul lor și din cauzele eterne ale lucrurilor viitoare".

propoziție, faptul că voi fi acasă astă-seară nu este necesar, este contingent; ce semnificație are atunci necesitatea ei, pe care o introducem în partea a doua a propoziției?

Este clar că ea nu poate ridica caracterul de contingență, care aparține, prin definiție, propoziției noastre. Evenimentul indicat de propoziție se întîmplă în mod contingent; necesitatea pe care o introducem, în urmă, nu se poate referi la acest eveniment, deoarece am declarat că el este contingent. Ea privește cu totul altceva: dacă știu că propoziția este adevărată — chiar în mod contingent —, pot afirma despre ea că nu este posibil să nu fie adevărată. Acest lucru nu înseamnă că îi atribui ei însăși o necesitate, ci că *afirmația mea despre ea* este imposibil să nu fie adevărată. Cu alte cuvinte, fie propoziția p; despre ea declar: „p este adevărat"; și atunci, propoziția pe care o afirm despre „p este adevărat", adică «este adevărat că „p este adevărat"», este necesară, cu condiția să știu în prealabil că p este adevărat. Deosebim aici două aserțiuni: una care atribuie lui p o valoare de adevăr și una despre această valoare de adevăr. Łukasiewicz nu observă această distincție și consideră propoziția (d) ca atribuind lui p contingent o necesitate, ceea ce e absurd. Prin transpoziție obținem imediat: „dacă p este fals, atunci p este imposibil". Łukasiewicz o scrie sub forma simbolică 2:

$$CNpNMp$$

Această propoziție este falsă, întrucît niciodată din simpla constatare a falsității unei propoziții nu pot deduce imposibilitatea ei. Alt sens însă are afirmația: „Cînd constat că o propoziție este falsă pot afirma despre ea că este imposibil să fie adevărată" (afirmație despre ea, dar care nu poate atribui altă modalitate propoziției decît falsul contingent).

Se vede, așadar, de ce se ajunge la contradicții și unde ar fi trebuit să opereze Łukasiewicz schimbarea.

În afară de aceasta, propoziția III nu poate avea loc în logica formală. Dacă a formaliza logica înseamnă a o constitui în afară de orice conținut determinat, urmează că adevărul

sau falsul unei propoziții nu pot depinde de evenimente viitoare. Deoarece în felul acesta evenimentele ar condiționa valorile lor de adevăr (adică valorile de adevăr ar fi condiționate în conținut).

Asemenea condiționări materiale nu pot avea loc în logica formală pură. Legile logicii, care sînt numai reguli simbolice, nu pot depinde de existența unui determinism în lumea externă.

Pentru a se vedea cît de delicată este raționea pe baza căreia s-au formulat logicile ne-chrysippiene, să analizăm un exemplu amuzant, care are mai multe versiuni. Îl găsim într-o lucrare a lui F. Gonseth, care se declară împotriva terțiului exclus, scriind: „Nu are nici un sens să pretindem că *tot ceea ce nu este adevărat este fals și că tot ceea ce nu este fals este adevărat.* Se poate foarte bine ca un lucru care ar putea să fie adevărat sau fals să nu fie nici adevărat și nici fals"[62].

Pentru a ilustra această afirmație, Gonseth citează un exemplu referitor la un viitor contingent, așa-numita parabolă a giganților subtili și cruzi:

Într-o insulă locuiau asemenea giganți care condamnau la moarte și executau pe orice străin ar fi pătruns în insula lor. Deoarece erau subtili, lăsau pe condamnat să-și pronunțe singur sentința. Îi puneau o întrebare și dacă răspunsul era adevărat îl sacrificau Idolului Adevărului, iar dacă răspunsul era fals, atunci îl sacrificau Idolului Minciunii. S-a întîmplat însă că într-o zi a pătruns în insulă un străin „mai subtil decît ei" — scrie Gonseth (noi credem că mai puțin cunoscător al legilor logice) — căruia i-au pus întrebarea imprudentă: „Ce soartă vei avea?" Străinul a răspuns: „Mă veți sacrifica Idolului Minciunii".

Iată acum care este încurcătura. Giganții au intrat în deliberare, ca să determine dacă această propoziție este adevărată sau nu, pentru a-l sacrifica într-un fel sau în altul. Dacă străinul a spus adevărul, atunci, după condițiile problemei, trebuia sacrificat Idolului Adevă-

[62] **F. Gonseth,** *Les fondements des matématiques*, Ed. Blanchard, Paris, 1926, p. 214.

rului; dacă a spus un fals, atunci trebuia să fie sacrificat Idolului Minciunii, ceea ce nu se putea, fiindcă în acest caz ar fi spus un adevăr.

Gonseth conchide: „Opoziția dintre fals și adevărat este schematică și nu împarte în două categorii, cele adevărate și cele false, toate aserțiunile... Parabola face tocmai să vedem că această împărțire nu se poate efectua odată pentru totdeauna". Desigur, Aristotel ar fi conchis că întrucît propoziția „Mă veți sacrifica Idolului Minciunii" se referă la un fapt viitor nu poate fi declarată nici adevărată, nici falsă.

Noi credem că străinul comite o eroare de logică simplă cînd declară „mă veți sacrifica Idolului Minciunii", care este în afară de considerația timpului, a faptului că uciderea lui avea să se întîmple într-un moment viitor. Într-adevăr, condiția logică pusă de giganți era: adevărul sau falsitatea propoziției pe care o vei spune va determina modalitatea uciderii.

Dimpotrivă, străinul calcă această condiție spunînd „mă veți sacrifica Idolului Minciunii", deoarece acum propoziția aceasta va fi adevărată sau falsă după modul cum va fi el sacrificat unui idol sau altuia. Străinul inversează deci condițiile, spunînd că adevărul sau falsitatea propoziției sale depind de modalitatea uciderii sale. Cele două criterii care stau la baza deciziei — pe de o parte valoarea de adevăr a propoziției străinului, pe de alta, felul uciderii lui — sînt în cerc vicios. Dacă giganții erau chiar atît de subtili cît spune parabola, cu siguranță că au descoperit viciul raționamentului.

Rezultatul acesta arată atemporalitatea propozițiilor logice, deoarece am putut stabili viciul argumentării acesteia în afară de faptul că uciderea urma să se facă în viitor.

Credem a fi arătat însă suficient cît de delicată e chestiunea și că grăbit au conchis logicienii că există propoziții care nu pot fi declarate nici false, nici adevărate — cel puțin în momentul în care vorbim —, cum sînt cele posibile, care se referă la evenimente contingente viitoare.

6
Logica intuiţionistă

* 6.1. Intuiţionismul lui Brouwer

Ultimele decenii ale secolului trecut au avut să înregistreze unul din faptele cele mai bizare pe care le puteam aştepta în domeniul matematicilor: apariţia celebrelor paradoxe logico-matematice, în special ale teoriei mulţimilor. Pentru a înţelege mai bine cele ce urmează, să considerăm unul din aceste paradoxe, fie acela descoperit de Russell. O mulţime este o colecţie de obiecte distincte — indiferent dacă sînt reale sau nu — întrunite la un loc pe baza unei proprietăţi comune. Obiectele care aparţin mulţimii se numesc elementele ei: legătura dintre un element şi mulţimea căreia aparţine este deci o apartenenţă. Să notăm o mulţime cu E, un element al ei cu a şi legătura de apartenenţă cu $\in$; în aceste condiţii putem scrie:

$$a \in E$$

Elementul a aparţine mulţimei E. Dacă examinăm acum diversele mulţimi care se pot forma, putem, foarte uşor, să ne dăm seama că unele mulţimi nu se conţin ca element, nu au aceeaşi proprietate ca şi elementele lor; spre exemplu, mulţimea numerelor prime nu este şi ea

un număr prim. Sînt și mulțimi care se conțin? Răspunsul pare afirmativ. Într-adevăr, mulțimea tuturor noțiunilor abstracte este, ea însăși, o noțiune abstractă și deci se conține sigur, își aparține. În condițiile acestea, putem despărți toate mulțimile posibile în două categorii: pe de o parte mulțimile care nu se conțin ca element, pe de alta acelea care se conțin. Aceste două categorii de mulțimi formează, fiecare la rîndul ei, o mulțime: fie A mulțimea tuturor mulțimilor care nu se conțin și fie B mulțimea tuturor mulțimilor care se conțin.

Ar părea evident că, atunci cînd ne întrebăm despre o mulțime oarecare „se conține sau nu se conține?", răspunsul să fie „sau se conține, sau nu se conține, *tertium non datur*". Principiul terțiului exclus nu ar lăsa loc pentru o a treia posibilitate.

Ei bine, să punem această chestiune pentru mulțimea A a tuturor mulțimilor care nu se conțin: A se conține sau nu se conține, *tertium non datur*. Să presupunem că ea se conține; după definiție, A conține numai mulțimi care nu se conțin. Am ajuns la o contradicție. Să presupunem că A nu se conține; cum, după definiție, A conține toate mulțimile care nu se conțin, ea se conține. Am ajuns iarăși la o contradicție.

Nu putem afirma nici că A se conține, nici că nu se conține și principiul terțiului exclus iese compromis.

Multe asemenea paradoxe au făcut pe matematicieni și logicieni să caute o ieșire din impas. Una din soluțiile propuse este teza *intuiționistă* a lui L. E. J. Brouwer[1].

Principiul fundamental al doctrinei intuiționiste este următorul: *orice propoziție care are un conținut trebuie să indice una sau mai multe stări de lucruri (Sachverhalte)*

---

[1] Brouwer și-a susținut punctul său de vedere cam de pe la 1907. Lucrările sale mai cunoscute în această direcție sînt: *Intuitionismand formalism*, în „Bulletin American Mathematical Society", 20, 1913; *Intuitionistische Mengenlehre*, în „Jahersbericht der deutschen Mathematischen Vereinigung", 28, 1920; *Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus*, în „Berichte der Akademie Berlin physikalisch — mathematische Klasse", 1928; *Mathematik, Wissenschaft und Sprache* în „Monatshefte fur Mathematik und Physik", 36, 1929; *Historical background, principles and methods of intuitionism*, în „South African Journal of Science", 49, pp. 139—146

bine determinate şi accesibile experienţei noastre. Iată însă ce se întîmplă: în domeniul colecţiilor infinite, după Brouwer, nu are nici un sens să spunem că un element *a* aparţine unei mulţimi *E*, fără să putem indica acel element (conform principiului de mai sus); cum putem spune atunci că o colecţie are o infinitate de elemente dacă nu putem — fiindcă în domeniul infinitului nu putem opera această indicaţie în mod total — să arătăm fiecare membru al colecţiei? O propoziţie are, aşadar, conţinut cînd e legată prin intuiţia noastră imediată de anume stări de lucruri. Fie atunci propoziţia următoare *a*: „fiecare element al mulţimii *K* posedă proprietatea *P*"; dacă mulţimea *K* este infinită, atunci negaţia acestei propoziţii „*a* este falsă" nu satisface principiul de mai sus, întrucît nu avem posibilitatea să putem arăta, pentru o infinitate de elemente, stările de lucruri care împiedică ca ele să aibă proprietatea *P*. Care este concluzia lui Brouwer? Imitînd ceea ce se petrecea în filozofie, matematicienii au extrapolat — după Brouwer, în mod nelegitim — adevărurile logice, considerîndu-le ca „ideale" şi socotindu-le valabile chiar şi acolo unde nu există un control direct, cum e în domeniul infinitului[2].

În particular, s-a acordat această valabilitate principiului terţiului exclus, care nu este valabil decît în domeniul colecţiilor finite. „Credinţa în eficacitatea nelimitată a principiului terţiului exclus, în studiul legilor naturale, implică prin aceasta însă şi credinţa în caracterul finit şi în structura atomică a lumii"[3]. Cu alte cuvinte, principiul terţiului exclus nu are valoare şi nu s-a născut decît din proiectarea matematicii pe un sistem finit al ştiinţelor naturii. Nu este, atunci, imprudent să extindem, fără nici o motivare, adevărul logic, *tale quale*, şi în domeniul infinitului?

Brouwer crede că acesta este motivul care a făcut să apară paradoxele logice.

Pentru a corecta această accepţie a principiului terţiului exclus, Brouwer dă o definiţie negaţiei: propoziţia „*a*

[2] **L. E. J. Brouwer**, *Mathematik, Wissenschaft und Sprache*, p. 159.

[3] *Intuitionistische Mengenlehre*, p. 208.

este fals" trebuie să însemne „*a* conduce la o contradicție", adică „*a* este absurd". Negația lui *a* devine, astfel, o propoziție existențială, care satisface principiul intuiționist: există o serie de deducții logice, care, în ipoteza că *a* este adevărat, conduc la o contradicție. *Propozițiile existențiale* au fost supuse de Brouwer unei analize foarte delicate. O propoziție existențială nu are nici un sens dacă nu putem indica starea de lucruri, referentul experimental al ei; sau dacă nu putem să dăm, o dată cu enunțarea ei, și construcția corespunzătoare.

Fără aceste indicații propoziția este aparentă și nu are nici un înțeles. Însă în științele naturii, propozițiile de existență au totdeauna referent experimental; iar în matematici, propozițiile de felul acesta sînt însoțite, totdeauna, de indicația construcției corespunzătoare.

După Brouwer nu este o propoziție existențială o constatare pură, că am găsit un element corespunzător într-o mulțime *K*. Într-adevăr, dacă ar fi așa, propoziția existențială ar fi fost falsă *înainte* de găsirea construcției și adevărată *după*. Așa se ivesc propoziții care, deși au conținut invariabil în timp, nu pot fi pronunțate decît în anumite condiții.

În rezumat: *pentru o propoziție generală, negația ei nu poate fi privită ca având, în general, un sens bine determinat*. Numai în anumite condiții date negația unei propoziții are un înțeles precis, cum se întîmplă în domeniul finitului. Cu aceasta ajungem la cîteva concluzii extrem de importante. Mai întîi, în demonstrațiile indirecte, care fac uz de principiul terțiului exclus, adică în deducerea unei proprietăți prin *reductio ad absurdum*, principiul acesta nu mai poate fi întrebuințat într-o formă generală.

Într-adevăr, fie propoziția „obiectul *A* are proprietatea *P*"; dacă afirm că e absurd ca această propoziție să fie falsă, nu urmează că ea e adevărată, deoarece, pentru a fi adevărată ea trebuie să aibă o indicație experimentală sau de construcție și există un caz cînd nu putem face acest lucru; anume cînd e vorba de colecții infinite. De unde axioma lui Brouwer: *Absurditatea absurdității nu implică adevărul.* (Adevărul implică însă absurditatea

absurdității). Cu alte cuvinte, absurditatea absurdității ne dă o modalitate particulară a propozițiilor, care diferă de noțiunile simple de adevăr și fals.

Restrîngînd domeniul de aplicabilitate a principiului terțiului exclus, Brouwer crede că elimină paradoxele infinitului. Cu toate acestea, în logica intuiționistă acest principiu nu e declarat fals, ci numai nu poate fi dovedit. El rămîne adevărat în mod strict pentru domeniul finitului. Logica lui Brouwer capătă, astfel, o bază empirică, cum a relevat-o R. Wavre, „Brouwer, refuzînd aplicația principiului terțiului exclus, nu face decît să tragă o consecință inevitabilă, poate paradoxală, din teza empirică...

Existența ideală nu este pentru empirist decît o fereastră falsă pentru simetria propozițiilor, referitoare la o mulțime finită, pe de o parte, și la o mulțime infinită, pe de alta... Dar numai o analiză intuitivă a fiecărui caz particular determină dacă se găsește sub această jurisdicție... Matematica, acțiune a spiritului, reprezentare, nu trebuie să debordeze domeniul acestei reprezentări. Existența empirică este această reprezentare însăși, pe cînd existența ideală pare la sfîrșit să se anihileze în ideea ne-contradictoriului"[4].

* 6.2. Formalizarea logicii intuiționiste

Discipolul lui Brouwer, A. Heyting, a reușit să „formalizeze" logica intuiționistă, pe baza unor axiome simple, prezentînd un calcul de o mare valoare logică[5]. El recunoaște, ce-i drept, că „nu se pot reduce toate posibilitățile gîndirii la un număr finit de reguli stabilite dinainte". Totuși, calculul său urmărește să redea desfășurarea gîndirii în cadrul doctrinei intuiționiste. Pentru aceasta Heyting își va alege în așa fel axiomele încît să nu cuprindă

[4] **Rolin Wavre,** *Y-at-il une crise des mathématiques?*, în „Revue de Métaphysique et de Morale", 1924, pp. 435—470.

[5] **A. Heyting,** *Die Formalen Regeln der intuitionistischen Logik*, în „Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften", Physikalisch-math. Klasse, Berlin, 1930, pp. 42—56.

principiul terțiului exclus și nici să nu permită derivabilitatea sa.

Noțiunile primitive de la care pleacă în construcția sistemului sînt în număr de patru, și anume[6]:

Conjuncția „$\wedge$": propoziția $p \wedge q$ (citită „p și q") poate fi asertată dacă și numai dacă atît p cît și q pot fi asertate.

Disjuncția „$\vee$": $p \vee q$ („p sau q") poate fi asertată dacă și numai dacă cel puțin una din propozițiile p și q poate fi asertată. Spre deosebire de disjuncția clasică, s-a arătat că o disjuncție intuiționistă poate fi demonstrată dacă și numai dacă unul anume din termenii săi poate fi demonstrat (sau amîndoi)[7]. Deci ea „constituie pentru intuiționist o comunicare incompletă a unei afirmații care spune că p are loc sau q are loc sau, cel puțin, care dă o metodă prin care să putem alege care dintre cele două propoziții — p și q — are loc". *(A disjunction* p *or* q *constitutes for the intuitionist an incomplete communication of a statement telling us that* p *hold or that* q *hold, or at least giving a method by which we can choose from* p *and* q *one which holds.)*[8]

Negația „$\neg$": $\neg p$ („non-p" sau „p este absurd") exprimă faptul că o contradicție q *și non-*q rezultă din p printr-un raționament intuiționist sau, mai explicit, că cineva posedă o metodă care, dintr-o demonstrație a lui p, ne furnizează o demonstrație a unei contradicții q *și non-*q (sau a unei afirmații absurde, de exemplu $1 = 0$)[9].

Implicația „$\supset$": $p \supset q$ („p implică q" sau „dacă p atunci q") exprimă faptul că printr-un raționament intuiționist din p rezultă q sau, mai explicit, că cineva posedă o metodă prin care din orice demonstrație a lui p se poate obține o demonstrație a lui q[10].

---

[6] **A. Heyting,** *Intuitionism — An Introduction*, Amsterdam, 1956, pp. 98—99.

[7] Afirmație făcută mai întîi de Gödel (1932) și demonstrată ulterior de Gentzen, Tarski, McKinsey etc.

[8] **S. C. Kleene,** *Introduction to Metamathematics*, pp. 50—51.

[9] *Ibidem*, p. 51.

[10] *Ibidem.* În memoriul său din 1930, pe care îl vom urmări și noi în următoarele paragrafe, Heyting notează implicația intuiționistă cu același semn pe care îl întrebuințase și Russell pentru implicația materială.

Ca o trăsătură specifică calculului intuiționist, cele patru conective de mai sus nu pot fi definite, așa cum a arătat J. C. C. McKinsey[11], unul în funcție de celelalte. În logica lui Russell, spre exemplu, implicația și conjuncția erau introduse cu ajutorul negației și disjuncției prin echivalențele:

1.01 $p \supset q \,.=.\sim p \vee q$

3.01 $p \,.\, q \,.=.\sim (\sim p \vee \sim q)$

Dar, după cum vom vedea, în sistemul intuiționist echivalențele corespunzătoare nu mai au loc.

În cele ce urmează, literele a, b, c,... vor reprezenta propoziții.

Pentru constituirea calculului său propozițional, Heyting pleacă de la 11 axiome. Din acestea, printr-un șir de operații simple, se pot obține teoremele. Atît axiomele cît și teoremele primesc în față, întrucît sînt socotite propoziții adevărate, semnul de aserțiune „$\vdash$“, pe care am văzut că-l utiliza și Russell. Regula *modus ponens*, care în schemă este reprezentată astfel:

$$\frac{\vdash .\, a \qquad \vdash .\, a \supset b}{\vdash .\, b}$$

este prescurtată de Heyting în modul următor:

$$\vdash a \supset \vdash b$$

Din afirmația lui a rezultă afirmația lui b.

* 6.3. Reguli de operații

1.1 Pentru a arăta că o formulă este pe lista propozițiilor socotite adevărate, se va pune înaintea ei semnul de aser-

[11] **J. C. C. McKinsey**, *Proof of the Independence of the Primitive Symbols of Heyting's Calculus of Propositions*, în „Journal of Symbolic Logic“, IV (1939), pp. 155—158.

țiune „⊢"; aceasta se face pentru propozițiile demonstrate.

Pentru axiome, adică pentru propozițiile admise fără demonstrație, se va întrebuința, pentru a specifica lucrul acesta, semnul dublu de aserțiune „⊢⊢"[12].

1.2 Dacă a și b sînt adevărate, atunci $a \wedge b$ este adevărat[13].

1.3 Dacă a și $a \supset b$ sînt adevărate, atunci și b este adevărat[14].

1.4 La începutul fiecăruia din următoarele trei paragrafe vom specifica constantele ce intră în constituirea formulelor. Semnele care apar și nu sînt specificate astfel, sînt variabile. Dintr-o formulă adevărată ia naștere tot o formulă adevărată cînd se înlocuiesc variabilele, pretutindeni, prin alte combinații de semne[15].

1.5 $\binom{p}{x}a$ indică că în formula a trebuie înlocuită variabila x pretutindeni prin semnul p.

1.6 Formula $a \underset{D}{=} b$ se numește o definiție; o definiție permite să înlocuim o formulă într-o altă formulă în care ar figura primul membru al definiției prin membrul al doilea și viceversa, adică să înlocuim a prin b sau b prin a, chiar dacă a reprezintă o formulă întreagă, iar b, la fel, o formulă. Împărțirea formulelor se face, ca în calculul lui Russell, prin puncte. Numărul de puncte utilizat într-o formulă poate fi redus, făcînd apel la următoarea convenție: de cîte ori întîlnim în formula respectivă una din constantele (conectivele) $\wedge$ sau $\vee$ împreună cu o

---

[12] Ulterior Heyting a renunțat la această notație distinctivă, folosind aserțiunea simplă „⊢" atît pentru axiome cît și pentru teoreme.

[13] Aceasta este regula de adjunctie și am întîlnit-o și în sistemele lui Lewis (vedeți *4.5).

[14] Este vorba de binecunoscuta regulă *modus ponens*.

[15] În felul acesta Heyting enunță regula de substituție. Indicarea substituției se face conform notației stabilite la punctul 1.5. Variabilele vor fi notate, în calculul propozițional, prin litere mici latine.

altă conectivă fără ca numărul de puncte utilizat să indice pe care dintre ele o citim mai întîi, vom citi mai întîi conectivele $\wedge$ sau $\vee$. De exemplu, formula

$$a \supset a \wedge a$$

va fi citită ca și cum parantezele ar fi așezate astfel:

$$a \supset (a \wedge a)$$

și nu

$$(a \supset a) \wedge a$$

Dacă este necesar, partea unei formule în fața căreia stă semnul $\neg$ va fi închisă în paranteze.

* 6.4. Constantele $.., :, :., ::, \supset, \wedge, \supset\subset, (,), \overline{=}_D$

Cum am spus, o teoremă se va recunoaște după semnul „$\vdash$" pus înaintea ei, iar o axiomă după semnul „$\vdash\vdash$". Definiția va fi indicată de semnul $\overline{=}_D$.

În acest paragraf vom da cîteva axiome heytingiene, precum și teoremele care se deduc din ele. Demonstrația se va face pe baza regulilor de *adjuncție*, *modus ponens* și *substituție*. Vom indica sub o teoremă modul ei de demonstrație, așa cum s-a procedat și în celelalte sisteme. Să începem, așadar, să scriem lista propozițiilor adevărate din logica intuiționistă, care se referă la constantele anunțate în titlul acestui paragraf (axiome).

2.1 $\vdash\vdash . a \supset a \wedge a$

2.11 $\vdash \vdash . a \wedge b \supset b \wedge c$

2.12 $\vdash \vdash . a \supset b . \supset . a \wedge c \supset b \wedge c$

2.13 $\vdash \vdash . a \supset b . \wedge . b \supset c . \supset . a \supset c$

Acesta este „principiul silogismului".

2.14 $\vdash \vdash\cdot . b \supset . a \supset b$

Dacă b este adevărat, atunci el este implicat de orice propoziție a.

2.15 $\vdash \vdash . a \wedge . a \supset b . \supset b$

Dacă a este adevărat și a implică b, b este adevărat.

2.01 $\vdash . a \supset \subset b . \underset{D}{=} . a \supset b . \wedge . b \supset a$

Propoziția 2.01 definește semnul nou introdus „$\supset\subset$", de echivalență, și anume: a spune că două propoziții a și b sînt echivalente înseamnă a spune că prima implică pe a doua și, în același timp, a doua implică pe prima. Este aceeași definiție ca și în logica russelliană, numai că Heyting utilizează pentru a pune în evidență această dublă implicație, dublul semn de implicație „$\supset\subset$".

Să considerăm acum și unele teoreme derivate din aceste axiome.

2.2 $\vdash . a \wedge b \supset a$

Demonstrație:

[2.14] $\vdash . a \supset . b \supset a : \supset :$

[2.12] $\vdash . a \wedge b \supset . b \supset a . \wedge b . \supset$ [2.15]a

Să urmărim această demonstrație scrisă în simbolistica lui Heyting.

Primul rînd reprezintă axioma 2.14. În baza axiomei 2.12, care afirmă că membrii unei implicații pot fi „înmulțiți" (conjunctați) cu același factor, în speță b, aceasta implică expresia:

$$a \wedge b \supset . b \supset a . \wedge b$$

care va fi deci, conform regulii *modus ponens*, adevărată. Din ultimul membru al implicației deduc în baza axiomei 2.15 propoziția a.

Atunci principiul silogismului (2.13) ne asigură de implicația lui a de către $a \wedge b$; deci teorema este demonstrată.

Nu vom face toate demonstrațiile teoremelor ce urmează. De altfel toate sînt destul de simple și pot fi regăsite de cititor după puțin exercițiu.

2.21 $\vdash . a \supset a$

2.22 $\vdash . a \wedge b \supset b$

2.23 $\vdash . a \supset b . \wedge . c \supset d . \supset . a \wedge c \supset b \wedge d$

2.24 $\vdash . a \supset b . \wedge . a \supset c . \supset \subset . a \supset b \wedge c$

2.25 $\vdash . b . \wedge . a \supset c . \supset . a \supset b \wedge c$

Demonstrație:

[2.14, 2.12] $\vdash . b \wedge . a \supset c . \supset . a \supset b . \wedge . a \supset c . \supset .$

[2.24] $a \supset b \wedge c$

2.26 $\vdash . b \supset . a \supset a \wedge b$

Demonstrație:

[2.21, 2.14] $\vdash . b \supset . a \supset a$ (1)

[2.14] $\vdash . b \supset . a \supset b$ (2)

[(1), (2), 2.24] $\vdash . b \supset . a \supset a . \wedge . a \supset b . \supset . a \supset a \wedge b$

2.27 $\vdash : a \supset . b \supset c : \supset \subset a \wedge b . \supset c$

2.271 $\vdash : a \supset . b \supset c : \supset \subset : b \supset . a \supset c$

Demonstrație:

[2.27] $\vdash : a \supset . b \supset c : \supset : a \wedge b \supset c : \supset :$

[2.11, 2.13] $b \wedge a \supset c : \supset : [2.27]\ b \supset . a \supset c$

2.28 $\vdash . a \supset c . \supset . a \wedge b \supset c$

2.281 $\vdash : a \supset b . \supset : a \supset . c \supset b$

2.282 $\vdash . a \wedge . a \wedge b \supset c . \supset . b \supset c$

Demonstrație:

[2.27, 2.12] $\vdash : a \wedge . a \wedge b \supset c : \supset : a \wedge : a \supset . b \supset c : \supset :$

[2.15] $b \supset c$

2.29 $\vdash : a \supset b . \supset : b \supset c . \supset . a \supset c$

2.291 $\vdash : b \supset c . \supset : a \supset b . \supset . a \supset c$

2.3 $\vdash . a \wedge b . \wedge c . \supset . a \wedge . b \wedge c$

Demonstrație:

[2.2, 2.28] $\vdash . a \wedge b . \wedge c . \supset a$ **(1)**

[2.22, 2.12] $\vdash . a \wedge b . \wedge c . \supset b \wedge c$ **(2)**

[(1), (2), 2.24] $\vdash$ 2.3

2.31 $\vdash . a \wedge b . \wedge c . \supset . b \wedge a . \wedge c$

2.32 $\vdash . a \wedge . b \wedge c . \supset . a \wedge b . \wedge c$

Demonstrație:

[2.11] $\vdash . a \wedge . b \wedge c . \supset . b \wedge c . \wedge a . \supset .$

[2.31] $c \wedge b . \wedge a . \supset .$ [2.3] $c \wedge . b \wedge a . \supset .$
[2.11] $b \wedge a . \wedge c . \supset .$ [2.31] $a \wedge b . \wedge c$

2.02 $\vdash . a \wedge b \wedge c . \overline{=}_D . a \wedge b . \wedge c$

2.33 $\vdash a \wedge b \wedge c \supset \subset a \wedge c \wedge b \supset \subset b \wedge a \wedge c$ etc.

2.4 $\vdash . a \supset b . \wedge . b \supset c . \wedge . c \supset d . \supset . a \supset d$

* 6.5. Constanta ∨

Vom reda teoremele stabilite de Heyting față de semnul „∨" de disjuncție logică, fără a mai scrie și indicațiile demonstrațiilor corespunzătoare, deoarece acestea sînt foarte simple.

3.1 $\vdash\vdash a \supset a \vee b$

3.11 $\vdash\vdash a \vee b \supset b \vee a$

3.12 $\vdash\vdash . a \supset c . \wedge . b \supset c . \supset . a \vee b \supset c$

3.2 $\vdash . a \vee b . \vee c . \supset . a \vee . b \vee c$

3.21 $\vdash a \vee . b \vee c . \supset . a \vee b . \vee c$

3.01 $\vdash . a \vee b \vee c . \overset{=}{D} . a \vee b . \vee c$

3.22 $\vdash a \vee a \supset a$

Demonstrație:

$[2.21, \binom{a}{b} \binom{a}{c} 3.12]$

Adică: 2.21 $\vdash . a \supset a$

Substituția 3.12 : $\vdash . a \supset a . \wedge . a \supset a . \supset . a \vee a \supset a$

Cum membrul întîi al implicației este adevărat, și al doilea este adevărat.

3.3 $\vdash . a \supset b . \wedge . c \supset d . \supset . a \vee c \supset b \vee d$

3.31 $\vdash . a \supset b . \supset . a \wedge c \supset b \vee d$

3.32 $\vdash . a \supset b . \supset . a \vee b \supset b$

3.33 $\vdash . a \vee b \supset b . \supset . a \supset b$

3.34 $\vdash . a \supset b . \supset . a \vee c \supset b \vee c$

3.35 $\vdash a \vee b \vee c \supset b \vee a \vee c \supset a \vee c \vee b$ etc.

3.4 $\vdash . a \wedge c . \vee . b \wedge c . \supset . a \vee b . \wedge c$

3.41 $\vdash . a \vee b . \wedge c . \supset . a \wedge c . \vee . b \wedge c$

3.42 $\vdash . a \wedge b . \vee c . \supset \subset . a \vee c . \wedge . b \vee c$

3.5 $\vdash . a \supset b \vee c . \wedge . b \supset d . \wedge . c \supset e . \supset . a \supset d \vee e$

3.51 $\vdash . a \supset b \vee c . \wedge . b \supset d . \wedge . c \supset d . \supset . a \supset d$

3.6 $\vdash : a \vee b \supset : a \supset b . \supset b$

* 6.6. Constanta ¬

Interesante sînt teoremele referitoare la negația „¬"; ele arată diferența dintre calculul intuiționist și calculul obișnuit.

4.1 $\vdash \vdash . \neg a \supset . a \supset b$

Dacă o propoziție este falsă „¬a" atunci ea implică orice propoziție „b".

4.11 $\vdash \vdash . a \supset b . \wedge . a \supset \neg b . \supset \neg a$

Dacă a implică b și în același timp a implică ¬ b, atunci a este falsă. Cu alte cuvinte avem regula cunoscută: dacă dintr-o propoziție se pot deriva două propoziții contradictorii, ea este falsă.

4.01 $\vdash . \neg \neg a \overset{-}{D} \neg (\neg a)$

4.2 $\vdash . a \supset b . \supset . \neg b \supset \neg a$

Teorema 4.2 exprimă regula transpoziției față de implicația $a \supset b$.

4.21 $\vdash . a \supset \neg b . \supset . b \supset \neg a$

4.22 $\vdash . a \supset b . \supset . \neg \neg a \supset \neg \neg b$

4.23 $\vdash . a \wedge b \supset c . \supset . a \wedge \neg c \supset \neg b$

4.24 $\vdash . a \supset b . \wedge \neg b . \supset \neg a$

Dacă a implică b și în același timp b este fals, atunci a este fals.

4.3 $\vdash . a \supset \neg \neg a$

O propoziție adevărată a implică dubla absurditate a lui a. Aceasta este „axioma lui Brouwer".

4.31 $\vdash . \neg a \supset \neg\neg\neg a$

4.32 $\vdash . \neg\neg\neg a \supset \neg a$

4.4 $\vdash . a \wedge \neg a \supset b$

4.41 $\vdash . a \wedge \neg a . \vee b . \supset b$

4.42 $\vdash . a \vee b . \wedge \neg a . \supset b$

4.43 $\vdash . \neg a \supset . \neg b \supset \neg (a \vee b)$

4.44 $\vdash . \neg (a \vee b) \supset \subset \neg a \wedge \neg b$

4.45 $\vdash . a \vee \neg a . \supset . \neg\neg a \supset a$

Ce spune această ultimă formulă? Prima parte, anume $a \vee \neg a$, este principiul terțiului exclus; așadar, propoziția 4.45 spune: dacă pentru o propoziție a principiul terțiului exclus este valabil, atunci este valabilă pentru acea propoziție $\neg\neg a \supset a$, care este conversa teoremei 4.3 a axiomei lui Brouwer.

4.46 $\vdash . \neg a \vee b . \supset . a \supset b$

4.53 $\vdash . \neg a \vee \neg b \supset \neg (a \wedge b)$

Vom avea încă cîteva teoreme interesante asupra dublei negații:

4.6 $\vdash . \neg\neg a \wedge \neg\neg b \supset \neg\neg (a \wedge b)$

4.61 $\vdash . \neg\neg (a \wedge b) \supset \neg\neg a \wedge \neg\neg b$

4.62 $\vdash . \neg\neg a \vee \neg\neg b \supset \neg\neg (a \vee b)$

4.63 $\vdash . \neg\neg (a \vee b) \wedge . \neg a \vee \neg\neg a . \supset \neg\neg a \vee \neg\neg b$

După cele spuse mai înainte, condiția $\neg a \vee \neg\neg a$ poate fi înlocuită prin $a \vee \neg a$ dar nu prin $\neg\neg a \supset a$.

4.7 $\vdash . a \supset \neg (b \wedge c) . \supset . a \wedge b \supset \neg c$

4.71 $\vdash . a \supset b \vee \neg c . \supset . a \wedge c \supset b$

În sfîrșit, în ceea ce privește terțiul exclus, avem următoarele teoreme:

4.8 $\vdash . \neg\neg (a \vee \neg a)$

4.81 $\vdash \neg\neg (\neg\neg a \supset a)$

4.82 $\vdash . a \vee \neg a \supset b . \supset . \neg\neg b$

4.83 $\vdash . a \vee \neg a \supset \neg b . \supset \neg b$

Această formulă arată că principiul terțiului exclus poate fi utilizat totdeauna în demonstrația unei propoziții negative[16].

4.9 $\vdash . a \supset b . \supset \neg (a \wedge \neg b)$

4.91 $\vdash . a \vee b \supset \neg (\neg a \wedge \neg b)$

4.92 $\vdash . a \wedge b \supset \neg (\neg a \vee \neg b)$

* 6.7. Axiomele intuiționiste și principiul terțiului exclus

Să strîngem la un loc cele 11 axiome intuiționiste:

2.1 $\vdash \vdash a \supset a \wedge a$

2.11 $\vdash \vdash a \wedge b \supset b \wedge a$

2.12 $\vdash \vdash . a \supset b . \supset . a \wedge c \supset b \wedge c$

2.13 $\vdash \vdash . a \supset b . \wedge . b \supset c . \supset . a \supset c$

2.14 $\vdash \vdash . b \supset . a \supset b$

---

[16] **Heyting,** *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*, p. 52.

2.15 $\vdash\vdash . a \wedge . a \supset b . \supset b$

3.1 $\vdash\vdash a \supset a \vee b$

3.11 $\vdash\vdash a \vee b \supset b \vee a$

3.12 $\vdash\vdash . a \supset c . \wedge . b \supset c . \supset . a \vee b \supset c$

4.1 $\vdash\vdash . \neg a \supset . a \supset b$

4.11 $\vdash\vdash . a \supset b . \wedge . a \supset \neg b . \supset \neg a$

Heyting reușește să arate independența acestor axiome printr-un procedeu formulat de P. Bernays[17]. Noi nu vom face aici aceste demonstrații, dar vom utiliza, urmărind pe Heyting, același procedeu pentru a demonstra că în sistemul intuiționist principiul terțiului exclus nu poate fi derivat ca teoremă.

Pentru aceasta să considerăm că propozițiile pot lua trei valori: „adevărul" notat cu 0, „falsitatea" notată cu 1 și, în sfîrșit, valoarea unei propoziții care nu poate fi falsă, dar al cărei adevăr nu e dovedit, notată cu 2[18].

Heyting dă pentru cele patru conective fundamentale niște matrice, așa cum am văzut că procedase și Łukasiewicz (*5.6). Scopul său este ca toate teoremele demonstrate să fie, în raport cu aceste matrice, niște tautologii. Observăm însă, bazîndu-ne și pe cele arătate în capitolele anterioare, că pentru a îndeplini acest deziderat este suficient ca:

1. Cele 11 axiome să fie toate tautologii.
2. Matricea conjuncției să fie astfel definită încît $0 \wedge 0 = 0$.
3. Matricea implicației să fie astfel definită încît $0 \supset b = 0$ numai atunci cînd și $b = 0$.

Cele trei reguli nu determină complet matricele. Este interesant de văzut cum folosește Heyting acest grad de libertate în scopul interpretării într-un anumit fel a conectivelor sale.

[17] **P. Bernays**, *Untersuchung des Aussagenkalküls der „Principia Mathematica"*, în „Mathematische Zeitschrift", 25 (1926), p. 305.

[18] **A. Heyting**, *op. cit.*, p. 56.

Pentru implicație matricea este următoarea (pe coloana din stînga sînt trecute valorile antecedentului, iar pe rîndul de sus valorile consecventului):

$a \supset b$	0	1	2
0	0	1	2
1	0	0	0
2	0	1	0

Vom încadra special cu linie întreruptă o submatrice a acesteia, și anume cea care reprezintă valorile implicației cînd atît a cît și b iau doar valorile „adevărat" și „fals". Cititorul poate observa că în acest caz ea coincide cu implicația clasică. Prin urmare, definiția matricială dată de Heyting implicației este o generalizare a celei clasice, pentru cazul cînd propozițiile pot lua trei valori de adevăr. Am văzut la timpul potrivit că și Łukasiewicz procedase tot la o astfel de generalizare, dar de pe alte poziții.

Urmărind această matrice, observăm că adevărul este implicat de orice (deci și de o propoziție avînd valoarea 2), falsul implică orice (deci și o propoziție avînd valoarea 2). Singurele cazuri cînd implicația nu este adevărată rămîn (în afara lui $0 \supset 1$) cel în care ambii termeni iau valoarea 2 (și cînd implicația în întregime ia valoarea 2, cum este, de altfel, natural în lumina interpretării pe care am văzut că o dă Heyting acestei valori) și cel în care antecedentul ia valoarea 2, iar consecventul valoarea 1 (falsul). Acesta din urmă este singurul punct în care matricea lui Heyting pentru implicație diferă de cea a lui Łukasiewicz.

Matricele pentru conjuncție și disjuncție sînt:

$\wedge$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

În acest fel, conjuncția verifică condiția cerută $0 \wedge 0 = 0$. Matricele reprezintă generalizări naturale ale conectivelor

clasice corespunzătoare. De altfel ele coincid întru totul cu generalizările date de Łukasiewicz.

Mai deosebită poate fi negația

$\neg$	0	1	2
	1	0	1

Așadar, negația intuiționistă a unei propoziții care nu poate fi falsă, dar nici dovedită adevărată, este o propoziție falsă. Și aici matricea lui Heyting diferă de cea a lui Łukasiewicz.

În raport cu aceste matrice putem calcula valoarea de adevăr a oricărei formule cînd variabilelor propoziționale ale acestora li s-au atribuit anumite valori. De exemplu, în cazul primei axiome

$$a \supset a \wedge a,$$

atribuind lui a pe rînd valorile 0, 1, 2, obținem mereu valoarea 0 (adevărat). O astfel de formulă, după cum am văzut, se numește o *tautologie*. Cititorul poate proba în acest fel că toate cele 11 axiome sînt tautologii.

Pentru a nu mai prelungi această discuție, e suficient să spunem că toate cele trei condiții enumerate la începutul acestui paragraf sînt îndeplinite. Prin urmare, orice teoremă intuiționistă, adică orice formulă demonstrabilă în logica lui Heyting, este o tautologie față de matricele sale trivalente.

Rămîne să vedem dacă principiul terțiului exclus, adică formula $a \vee \neg a$, este o tautologie. Cînd a ia valoarea 2, adică este o propoziție care nu poate fi falsă, dar al cărei adevăr nu poate fi dovedit, ținînd seama de matricele disjuncției și negației, obținem:

$$2 \vee \neg 2 = 2 \vee 1 = 2$$

și prin urmare formula care exprimă principiul terțiului exclus nu este o tautologie, deci nu face parte dintre propozițiile adevărate în sistemul lui Heyting.

Că asemenea propoziții (ce nu pot fi false, dar nici dovedite ca adevărate) există într-adevăr, ne-o probează

următorul exemplu din matematici, pe care Brouwer l-a găsit în 1925[19]. Scriem dezvoltarea zecimală a numărului π

$$3{,}1416\ldots$$

și sub ea fracția zecimală

$$\rho = 0{,}3333\ldots$$

pe care o întrerupem îndată ce înșiruirea de cifre 0123456789 a apărut în π. Dacă acest 9, din prima secvență de acest fel care apare în π, este a m-a cifră după virgulă, numărul ρ poate fi cu ușurință calculat, și anume[20]

$$\rho = \frac{10^m - 1}{3 \cdot 10^m}.$$

Să considerăm atunci propoziția: „ρ este un număr rațional" pe care s-o notăm prin α.

În ipoteza că ρ nu ar fi rațional, deci $\neg\alpha$, ar fi imposibil ca $\rho = \frac{10^m - 1}{3 \cdot 10^m}$. Prin urmare nici o secvență 0123456789 nu apare în π. Dar atunci ρ reprezintă suma progresiei geometrice infinite, care, după cum se știe, este 1/3; ceea ce este, de asemenea, o absurditate. Presupunerea $\neg\alpha$ a dus la o contradicție. După definiția negației intuiționiste (*6.2) avem dreptul să afirmăm $\neg\neg\alpha$.

Pe de altă parte însă, propoziția α, adică „ρ este un număr rațional", nu poate fi demonstrată ca adevărată

---

[19] **L. E. J. Brouwer**, *Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe*, în „Jahresbericht der deutschen Mathematischen Vereinigung", 33, pp. 251—256.

[20] ρ este în acest caz suma unei progresii geometrice finite

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \ldots + \frac{3}{10^m}.$$

căci aceasta ar însemna că putem calcula întregii k și n astfel încît $\rho = \frac{k}{n}$. Dar atunci putem fie să indicăm o secvență 0123456789 ce apare în dezvoltarea lui π, fie să demonstrăm că nici o astfel de secvență nu poate apare. Ceea ce, după cum se știe, nu e cazul.

Propoziția a face parte dintre enunțurile cărora Heyting le acordă valoarea 2. Ea nu respectă principiul terțiului exclus. Dar se poate observa și direct că, deoarece $\neg\neg a$ este adevărat, pe cînd a nu poate fi demonstrată ca adevărată, din $\neg\neg a$ nu vom putea deduce pe a. Așadar, a nu respectă nici „legea dublei negații". În logica lui Russell prin aceasta înțelesesem echivalența

4.13 $p \equiv \sim (\sim p)$,

adică o propoziție este echivalentă cu dubla sa negație. Echivalența poate fi descompusă în două implicații, care în logica bivalentă erau

2.12 $p \supset \sim (\sim p)$

2.14 $\sim (\sim p) \supset p$

În logica lui Heyting, prima dintre ele poate fi regăsită sub forma teoremei

4.3. $\vdash . a \supset \neg\neg a$,

adică o propoziție implică dubla sa absurditate, numită și axioma lui Brouwer, pe cînd a doua nu apare pe lista propozițiilor adevărate. Aceasta deoarece enunțuri ca cel de mai sus, care au valoarea de adevăr 2, nu respectă, după cum am văzut, acest principiu. Adică, din absurditatea absurdității lor nu se poate deduce adevărul lor.

Pentru formula $\neg\neg a \supset a$, matricele date de Heyting arată că:

$$\neg\neg 2 \supset 2 = \neg 1 \supset 2 = 0 \supset 2 = 2$$

și deci ea nu poate fi dedusă din axiome, nefiind o tautologie. În general însă, în cazul unei propoziții pentru care

este valabil principiul terțiului exclus este valabil și principiul dublei negații, așa cum ne arată teorema 4.45.

Demonstrația pe care am urmărit-o are un caracter mai mult formal, arătîndu-ne că din axiomele și regulile admise de Heyting nu se poate deduce pe cale formală expresia simbolică $a \vee \neg a$. Din felul în care a fost efectuată, se poate vedea totuși că ea conține și o justificare intuitivă. Să încercăm a ne apropia și mai mult de o asemenea justificare. Pentru aceasta trebuie să precizăm, o dată cu Heyting, faptul că logica intuiționistă tratează în mod exclusiv despre propozițiile matematice iar faptul că poate fi aplicată sau nu în afara domeniului acestora nu îl preocupă cîtuși de puțin pe intuiționist[21]. Orice propoziție matematică afirmă că o anumită construcție matematică, cu anumite proprietăți, a fost efectuată. Această construcție demonstrează propoziția. Este evident vorba de o construcție mentală. De pildă, propoziția care afirmă „$2 + 2 = 3 + 1$" este de fapt prescurtarea afirmației «Am efectuat construcțiile mentale indicate de „$2 + 2$" și de „$3 + 1$" și am găsit că ele conduc la același rezultat»[22].

Afirmarea unei formule de logică care conține variabilele propoziționale $a, b, c \ldots$, privită în această nouă interpretare, apare echivalentă cu afirmarea faptului că dispunem de o metodă de construcție care prin particularizare *(specialization)* ne furnizează construcția cerută de propoziția ce se obține înlocuind variabilele propoziționale $a, b, c \ldots$ prin propoziții matematice particulare. De pildă, afirmarea principiului terțiului exclus, $a \vee \neg a$, ar însemna că dispunem de o metodă generală din care, dată fiind o propoziție matematică α, prin particularizare să obținem fie o demonstrație a lui α, fie o demonstrație a lui $\neg \alpha$. Cum o astfel de metodă nu ne stă la îndemînă, nu putem afirma nici principiul terțiului exclus. Acest

---

[21] **A. Heyting**, *Intuitionism*, p. 97.

[22] *Ibidem*, p. 8. Construcția mentală apare, așadar, ca o experiență evidentă în sine. Nu putem intra aici în detalii asupra subiectului, pentru care cititorul poate consulta: **S. Körner**, *Introducere în filozofia matematicii*, Ed. științifică, 1965, cap. VI și VII.

fapt, de altfel, va apare şi mai pregnant în * 6.12, urmărind interpretarea pe care Kolmogorov a dat-o calculului intuiţionist.

* 6.8. Observaţii asupra calculului propoziţional intuiţionist

Principiul terţiului exclus şi principiul dublei negaţii nu sînt singurele legi clasice care îşi pierd valabilitatea în intuiţionism. Să urmărim pe scurt şi alte asemenea cazuri.

Una dintre legile clasice importante era transpoziţia:

4.1 $\vdash : p \supset q \,.\equiv.\, \sim q \supset \sim p$

În logica lui Heyting găsim teorema:

4.2 $\vdash . a \supset b \,.\supset.\, \neg b \supset \neg a$

Reciproca ei însă,

$$\neg b \supset \neg a \,.\supset.\, a \supset b,$$

nu are loc.

De asemenea, echivalenţa materială

4.56 $\vdash : \sim p \,.\sim q \,.\equiv.\, \sim (p \vee q)$,

una din cele două legi ale lui De Morgan, îşi are analoga ei printre teoremele demonstrate de Heyting, şi anume:

4.44 $\vdash . \neg (a \vee b) \supset \subset \neg a \wedge \neg b$,

pe cînd cealaltă lege a lui De Morgan,

4.51 $\vdash : \sim (p \,.\, q) \,.\equiv.\, \sim p \wedge \sim q$,

nu mai este valabilă din punct de vedere intuiţionist.

Am menţionat teorema

4.53 $\vdash . \neg a \vee \neg b \supset \neg (a \wedge b)$,

dar implicaţia inversă nu are loc.

O altă relație importantă este echivalența

$$\vdash . \neg\neg a \wedge \neg\neg b \supset\subset \neg\neg (a \wedge b),$$

care rezultă din cele două implicații 4.6 și 4.61, în timp ce față de disjuncție nu mai este valabilă decît o implicație, și anume:

4.62 $\vdash \neg\neg a \vee \neg\neg b \supset \neg\neg (a \vee b)$

Conversa ei nu are loc în general, ci, după cum am văzut, numai cînd negația uneia dintre propozițiile a și b verifică principiul terțiului exclus (vezi teorema 4.63).

* 6.9. Calculul cu funcții intuiționist

Calculul cu funcții a fost dezvoltat de Heyting în cadrul logicii intuiționiste[23]. Din punct de vedere formal, aceasta înseamnă adăugarea la simbolurile calculului propozițional (variabile propoziționale, conective etc.) a simbolurilor proprii calculului cu funcții, și anume: variabilele φ, ψ... pentru proprietăți, variabilele x, y... pentru indivizi etc.[24]. Axiomelor și regulilor de deducție intuiționiste li se adaugă următoarele două axiome și cele două reguli care am văzut că sînt specifice calculului cu funcții propoziționale[25]:

— axiome:

— $\vdash : (x) . \varphi x . \supset . \varphi y$

— $\vdash \vdash : \varphi y . \supset . (\exists x) . \varphi x$

—reguli (în care A și $B(x)$ sînt astfel de formule încît A nu conține variabila x liberă):

---

[23] **A. Heyting,** *Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie*, în „Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete", Berlin, 1934.

[24] Vedeți această lucrare, *3.9.

[25] *Ibidem*, *3.11.

din $A \supset B\ (x)$ putem deduce $A \supset (x)\ B\ (x)$, iar

din $B\ (x) \supset A$ putem deduce $(\exists\ x)\ B\ (x) \supset A$.

Fără îndoială însă, nu toate teoremele ce puteau fi demonstrate în logica bivalentă rămîn valabile aici. Spre exemplu, orice teoremă dedusă acolo cu ajutorul legii dublei negaţii, în intuiţionism nu va putea fi demonstrată. De altfel, Heyting a urmărit cu grijă toate consecinţele ce decurg din lipsa acestui principiu[26]. Una dintre ele este faptul că între cei doi cuantificatori — universal şi particular — nu mai există legătura simplă exprimată prin echivalenţele (teoremele T2′ şi T3 din *3.12):

$$\sim (\exists\ x) \sim \varphi\ x\ .\equiv.\ (x)\ \varphi\ x$$

$$\sim (x) \sim \varphi\ x\ .\equiv.\ (\exists\ x)\ \varphi\ x$$

Aceasta, deoarece în logica intuiţionistă s-a schimbat însuşi înţelesul obişnuit al cuantificatorilor. Fie fx o anumită proprietate matematică, iar D un domeniu de obiecte matematice ce pot avea această proprietate[27]. Se va putea afirma $(x)\ fx$ dacă sîntem în posesia unei metode generale de construcţie, care, odată ce s-a ales un element x_0 din D[28], să ne dea prin particularizare fx_0. Şi se va putea afirma $(\exists\ x)\ fx$ dacă s-a construit un element x_0 al lui D, astfel încît fx_0 să fie satisfăcută. După cum am observat însă (*3.12, pct. 2), în calculul de care ne ocupăm nu intervin în nici un fel indivizi concreţi[29]. Prin urmare, nu se poate demonstra că o proprietate este particular valabilă în sensul propriu-zis al cuvîntului.

---

[26] **A. Heyting,** *On weakened quantification*, în „Journal of Symbolic Logic", XI (1946), pp. 119—121.

[27] Intuiţioniştii numesc specie *(species)* o proprietate care se poate presupune că o au anumite entităţi matematice (**A. Heyting,** *Intuitionism*, p. 37).

[28] N-am mai notat indivizii particulari cu a, b, c... cum convenisem în cap. 3 B, pentru a nu-i confunda cu variabilele propoziţionale desemnate aici prin astfel de litere.

[29] Din acest motiv, acest calcul mai poartă şi denumirea de calculul cu funcţii *pur*, adică în care nu se iau în considerare nici un fel de valori determinate, pe care variabilele le-ar putea lua.

Orice demonstrație este demonstrația cazului general. G. Gentzen a obținut în acest sens un rezultat foarte interesant. Dacă $A(x)$ este o formulă care nu conține altă variabilă liberă în afară de x și dacă formula $(\exists x)\ A\ (x)$ este demonstrabilă în calculul cu funcții intuiționist, atunci $(x)\ A\ (x)$ este, de asemenea, demonstrabilă[30].

Și acum să urmărim cîteva teoreme ale logicii intuiționiste[31]. Demonstrațiile lor sînt perfect asemănătoare celor date în cap. 3 B, *3.12.

T1. $\vdash : (x) . \varphi x . \supset . \neg (\exists x) . \neg \varphi x$

T2. $\vdash : (\exists x) . \varphi x . \supset . (x) . \neg \varphi x$

Sînt singurele implicații care rămîn valabile din echivalențele clasice:

$$(x) . \varphi x . \equiv . \neg (\exists x) . \neg \varphi x$$

$$(\exists x) . \varphi x . \equiv . \neg (x) . \neg \varphi x$$

T3a. $\vdash : (x) . \neg \varphi x . \supset . \neg (\exists x) . \varphi x$

T3b. $\vdash : \neg (\exists x) . \varphi x . \supset . (x) . \neg \varphi x$

T4. $\vdash : (\exists x) . \neg \varphi x . \supset . \neg (x) . \varphi x$

a cărei implicație inversă nu are loc.

Printr-o substituție în T3a obținem:

T5a. $\vdash : (x) . \neg \neg \varphi x . \supset . \neg (\exists x) . \neg \varphi x$

și prin aceeași substituție, dar în T3b rezultă

T5b. $\vdash : \neg (\exists x) . \neg \varphi x . \supset . (x) . \neg \neg \varphi x$

În baza teoremelor intuiționiste 4.2 și 4.32 (*6.6) din T5a rezultă:

T6. $\vdash : \neg \neg (x) . \neg \neg \varphi x . \supset . \neg (\exists x) . \neg \varphi x$

---

[30] **G. Gentzen**, *Untersuchungen über das logische Schliessen*, în „Mathematische Zeitschrift", vol. 39, pp. 176—210, 405—431.

[31] **A. Heyting**, *Intuitionism*, p. 103. Numerotarea lor este independentă de cea a tezelor din calculul cu funcții bivalent (* 3.12).

T7. $\vdash : \neg\neg(x) . \varphi x . \supset . \neg(\exists x) . \neg\varphi x$

Din T7 și T5b obținem un rezultat important, și anume:

T8. $\vdash : \neg\neg(x) . \varphi x . \supset . (x) . \neg\neg\varphi x$

Heyting menționează drept una dintre trăsăturile surprinzătoare *(striking)* ale logicii intuiționiste faptul că reciproca acestei implicații nu are loc. Mai ales deoarece, în cazul cînd domeniul D în care poate varia x este finit, această reciprocă este valabilă. Într-adevăr, cînd D este format, spre exemplu, din două elemente, această reciprocă se reduce la teorema de calcul propozițional:

4.6 $\vdash . \neg\neg a \wedge \neg\neg b \supset \neg\neg(a \wedge b)$

Din T3a și T3b în baza lui 4.2 rezultă:

T9. $\vdash : \neg\neg(\exists x) . \varphi x . \supset . \neg(x) . \neg\varphi x$

T10. $\vdash : \neg(x) . \neg\varphi x . \supset . \neg\neg(\exists x) . \varphi x$

Prin substituție în T4,

T11. $\vdash : (\exists x) . \neg\neg\varphi x . \supset . \neg(x) . \neg\varphi x$

Din T11 și T10,

T12. $\vdash : (\exists x) . \neg\neg\varphi x . \supset . \neg\neg(\exists x) . \varphi x$

Și în acest caz implicația reciprocă nu are loc. Dar faptul este mai puțin surprinzător, căci nici formula corespunzătoare de calcul propozițional

$$\neg\neg(a \vee b) \supset \neg\neg a \vee \neg\neg b$$

nu este valabilă.

* 6.10. Compararea logicii intuiționiste cu logica bivalentă

Problema interpretării logicii formalizate de Heyting i-a condus pe mulți logicieni la compararea ei cu alte

sisteme. Dintre aceste comparații cele mai importante sînt:

1. comparațiile cu logica bivalentă;
2. comparațiile cu logicile modale ale lui Lewis.

Ne vom ocupa mai întîi de primele. Acestea la rîndul lor au condus la două rezultate complet diferite între ele.

În primul rînd, trebuie să facem următoarea observație. Examinînd matricele pentru conjuncția, disjuncția, negația și implicația intuiționistă (*6.7), precum și proprietățile pe care am văzut că le au în cadrul sistemului intuiționist, rezultă că ele sînt distincte de conectivele respective din logica bivalentă. Spre a fi riguroși, trebuie să utilizăm deci pentru ele alte notații. Pentru conjuncție și negație, vom păstra notațiile lui Heyting, care sînt distincte de cele clasice. Implicația intuiționistă o vom nota printr-o săgeată[32], așa încît „$\rightarrow$" va însemna „implică în logica lui Heyting". Cît despre disjuncția intuiționistă, am văzut că înțelesul ei este mai precis decît al celei clasice, întrucît s-a demonstrat că disjuncția a două propoziții nu poate fi demonstrată în logica lui Heyting decît dacă una dintre cele două propoziții a fost demonstrată (vedeți *6.2); de aceea o vom nota cu același simbol cu care o notăm și pe cea clasică, $\vee$, dar trasat cu linie îngroșată „$\mathbf{\vee}$".

Și acum să urmărim rezultatele obținute de logicieni în compararea logicii intuiționiste cu logica bivalentă.

Filozoful german O. Becker, de care am avut prilejul să vorbim, a observat că traducînd conectivele lui Heyting în conective bivalente ale logicii lui Russell, după cum urmează[33]:

Heyting :	$\rightarrow$	$\wedge$	$\mathbf{\vee}$	$\neg$
Russell :	$\supset$	$\cdot$	$\vee$	$\sim$,

toate teoremele intuiționiste devin tautologii (deci teoreme) ale logicii bivalente. Ceea ce pare evident, dacă pornim

[32] Semnul acesta a fost pentru prima dată utilizat în notația implicației de Hilbert (în *Grundzüge der theoretischen Logik*, 1928) și a fost adaptat ulterior de Heyting în logica sa.

[33] *Zur Logik der Modalitäten.*

de la premisa că logica intuiționistă s-a constituit ca o parte a logicii clasice, și anume aceea care nu se bazează pe principiul terțiului exclus. Deci, dacă am face abstracție de faptul că intuiționistul și clasicul acordă acelorași conective (conjuncție, disjuncție, negație și implicație) înțelesuri diferite, am putea spune că orice principiu enunțat în logica intuiționistă rămîne valabil și în logica clasică.

Reciproca nu este însă adevărată. Logica intuiționistă nu acceptă, după cum am văzut, o serie întreagă de principii clasice (principiul terțiului exclus, legea dublei negații etc.). În cazul acesta ea nu mai poate fi privită ca o logică bivalentă. Heyting o interpreta, după cum am văzut, ca pe o logică cu trei valori.

Dificultatea care apare la o asemenea interpretare stă în faptul că nu toate formulele valide (tautologiile în raport cu matricele lui Heyting) pot fi deduse din cele 11 axiome ale logicii intuiționiste. Se mai spune că sistemul nu este complet în raport cu această interpretare[34]. Pentru completare, Łukasiewicz a propus să i se adauge o a 12-a axiomă, și anume:

$$(\neg p \to q) \to (((q \to p) \to q) \to q)^{35}$$

Formula $(((q \to p) \to q) \to q)$ poartă numele de „legea lui Peirce" și este validă în logica bivalentă. Axioma introdusă de Łukasiewicz postulează valabilitatea ei în logica pe care o construiește astfel, dar numai pentru propozițiile p și q avînd proprietatea că din absurditatea lui p se deduce q. Această logică, după cum arată el, conține drept teoreme exact tautologiile față de matricele lui Heyting. Ea are următoarea proprietate, deosebit de interesantă: *dacă înlocuim într-o teză, valabilă în logica clasică, variabilele propoziționale simple prin negațiile lor, obținem o teză a acestui sistem* (bineînțeles, întrucît conectivele acestui sistem au notația intuiționistă, se presupune că

---

[34] Vedeți nota 23 din cap. 4.

[35] **J. Łukasiewicz,** *Die Logik und das Grundlagenproblem,* în „Les entretiens de Zürich" (1941). Am revenit în scrierea formulelor la notarea variabilelor propoziționale prin p, q, r etc.

s-au tradus mai întîi conectivele bivalente din teza clasică în cele intuiționiste corespunzătoare: de exemplu $\sim \sim p \supset p$ se traduce mai întîi în $\neg \neg p \rightarrow p$). Motivarea este imediată.

Așa cum ne arată matricea lui Heyting a negației

$\neg$	0	1	2
	1	0	1

dînd lui p toate cele trei valori 0, 1 și 2, propoziția $\neg p$ nu mai ia decît două valori: 0 (adevărul) și 1 (falsul). Restrîngînd matricele lui Heyting pentru conectivele propoziționale la aceste două valori, dăm peste matricele lui Russell (aceste restricții au fost notate în matricele lui Heyting cu linie punctată). Față de acestea însă, fiind teză clasică, formula va fi o tautologie. Prin urmare, așa cum a arătat Łukasiewicz, ea va fi deductibilă din cele 12 axiome (desigur, nu neapărat și din primele 11). Asemenea cazuri am remarcat și în logica intuiționistă. Spre exemplu, deși principiul dublei negații:

$$\neg \neg p \rightarrow p$$

nu era deductibil, principiul triplei negații,

$$\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p$$

era o teoremă (4.32).

În același sens Glivenko a găsit o serie de rezultate remarcabile, și anume:

1. Dacă o propoziție p este demonstrabilă în logica clasică, atunci și propoziția „p nu poate fi falsă" ($\neg \neg p$) este demonstrabilă în logica intuiționistă.

2. Cînd propoziția „p este falsă" este demonstrabilă în logica clasică, atunci ea este demonstrabilă și în logica lui Heyting[36].

---

[36] **Glivenko,** *Sur quelques points de la logique de M. Brouwer* (Académie royale de Belgique, „Bulletin de la classe des sciences", 5-e série, t. XV, 1920, pp. 183—188). În enunțurile lui Glivenko se presupune că traducerea simbolurilor s-a făcut așa cum am indicat mai sus.

Pe de altă parte, logicianul german K. Gödel, făcînd studiul comparat al logicii bivalente și intuiționiste, a ajuns la rezultate orientate în alt sens decît cele ale lui Becker, și anume că toate tezele logicii clasice care conțin numai negația și conjuncția sînt valabile în logica intuiționistă[37]. Prin urmare, dacă vom considera $p \supset q$ ca o prescurtare a formulei $\neg (p \wedge \neg q)$, iar $p \vee q$ ca o prescurtare a formulei $\neg (\neg p \wedge \neg q)$, putem regăsi în calculul intuiționist toate teoremele clasice[38]. De pildă, principiul terțiului exclus,

$$p \vee \neg p,$$

va fi o teoremă intuiționistă. Dar, ținînd seama de abrevierile făcute, ea reprezintă nici mai mult nici mai puțin decît

$$\neg (\neg p \wedge \neg \neg p),$$

care este, într-adevăr, o teoremă intuiționistă; ea poate fi dedusă imediat din teorema 4.8 cu ajutorul teoremelor 4.44 și 4.2.

J. Łukasiewicz a dezvoltat mai în amănunt acest punct de vedère[39]. Pentru el logica nu este o știință a legilor gîndirii sau a legilor vreunui alt obiect real, ci doar un instrument ce ne permite să tragem din anumite premise anumite concluzii. Dar, printre diversele sisteme logice, cel clasic (bivalent) nu este și cel mai adecvat în toate ocaziile. Spre exemplu, am văzut că pentru studiul modali-

---

[37] *Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie*, în „Ergebnisse eines math. Kolloquiums" (Wien), Heft 4, pp. 34—38. Rezultatele lui Gödel, ca și o serie de alte rezultate urmărind aceeași idee, se găsesc în lucrarea lui **S. C. Kleene**, *Introduction to Metamathematics*, § 81.

[38] Aceste prescurtări nu sînt făcute întîmplător. Ele își au justificarea în echivalențele

$$p \supset q \;.\equiv.\; \sim (p \;.\; \sim q)$$
$$p \vee q \;.\equiv.\; \sim (\sim p \;.\; \sim q)$$

care am văzut că erau valabile în logica bivalentă (tezele 4.53 și 4.57 din *3.6).

[39] *On the Intuitionistic Theory of Deduction*, în „Indagationes mathematicae", 14 (1952), pp. 202—212.

tăților el propunea o logică trivalentă (*5.7). Analiza întreprinsă de Łukasiewicz asupra logicii intuiționiste îi arată că este „mai bogată și prin urmare mai puternică" decît cea clasică. Să urmărim pe scurt această analiză. Mai întîi, Łukasiewicz reformulează sistemul de axiome dat de Heyting pentru calculul propozițional intuiționist. În locul celor 11 axiome (*6.7), el propune numai 10. În simbolistica utilizată de el, pe care am explicat-o în capitolul precedent[40], notînd implicația intuiționistă cu F, conjuncția intuiționistă cu T, disjuncția intuiționistă cu O, iar pentru negație utilizînd același simbol N ca și în sistemul bivalent, cele 10 axiome sînt:

1. $FqFpq$
2. $FFpFqrFFpqFqr$
3. $FTpqp$
4. $FTpqq$
5. $FpFqTpq$
6. $FpOpq$
7. $FqOpq$
8. $FFprFFqrFOpqr$
9. $FFpNqFqNp$
10. $FpFNpq$

Să citim pe cele mai complicate. Axioma 2, trecută în simboluri heytingiene, va fi:

$$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)),$$

iar axioma 8

$$(p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r))$$

Din aceste 10 axiome, prin numai două reguli de inferență, substituția și *modus ponens*, se pot deduce toate teoremele demonstrate de Heyting și numai acelea.

[40] Vedeți * 5.4.

În plus, sistemul de care ne ocupăm are o proprietate remarcabilă. Teoremele care conţin doar implicaţia pot fi deduse utilizînd numai primele două axiome; cele care conţin implicaţia şi conjuncţia pot fi deduse numai din axiomele 1—5; cele care conţin implicaţia şi disjuncţia pot fi deduse numai din axiomele 1—2 şi 6—8; cele care conţin doar implicaţia şi negaţia pot fi deduse numai din axiomele 1—2 şi 9—10. Nici o teoremă din care lipseşte vreunul din cele patru simboluri nu cere pentru demonstrare vreo axiomă din grupul în care acest simbol este prezent.

Şi acum, notînd cu Cpq[41] formula $NTpNq$ [în scrierea lui Heyting $\neg(p \wedge \neg q)$], Łukasiewicz consideră următoarele teoreme deduse din axiomele 1—10[42]:

$$CCNppp$$

$$CpCNpq$$

$$CCpqCCqrCpr$$

Să facem pentru moment abstracţie de faptul că le-am obţinut ca teoreme. Ele sînt în fond trei formule ale calculului propoziţional. Nimic nu ne împiedică să construim un sistem în care acestea să fie axiomele. Regulile de deducţie vor fi tot substituţia şi *modus ponens* (de data aceasta, evident, faţă de implicaţia notată prin C). Cu o precizare: în noul sistem nu apar deocamdată decît doi functori C şi N; căci F, T şi O — conectivele intuiţioniste — nu trebuie considerate ca putînd intra în compunerea formulelor sale[43].

Łukasiewicz reuşeşte să arate, pe de o parte, că toate teoremele sistemului astfel constituit devin teoreme intuiţioniste cînd, pretutindeni unde apare în ele, functorul C este înlocuit în funcţie de conectivele intuiţioniste T

---

[41] Am văzut în *5.4 că litera C era utilizată de Łukasiewicz pentru a simboliza implicaţia. În cazul de faţă, ca va simboliza implicaţia russelliană.

[42] Deci teoreme ale logicii lui Heyting.

[43] În fond deci este vorba despre o parte a teoremelor intuitioniste care conţin doar conjuncţia şi negaţia şi în care se prescurtează formula $NTpNq$ prin Cpq. Adică, ceea ce am văzut că lua în considerare şi Gödel.

și N, cu ajutorul cărora a fost definit. Pe de altă parte, aceste teoreme în C și N sînt toate teoremele clasice în implicația russelliană și în negația bivalentă.

Putem obține chiar toate teoremele clasice dacă, notînd în stilul lui Łukasiewicz cu K și A respectiv conjuncția și disjuncția din logica bivalentă (adică conectivele „." și „$\vee$"), le definim în funcție de C și N astfel:

$$Kpq \text{ drept } NCpNq^{44}$$

$$Apq \text{ drept } CNpq$$

Ce concluzie trage de aici Łukasiewicz? Teoria clasică a deducției este inclusă în cea intuiționistă. Numai că fiecare operează cu alte conective. Între conectivele clasice și cele intuiționiste există anumite legături. În afara negației N, comună după cum am văzut ambelor sisteme, fiecare din conectivele intuiționiste implică conectiva clasică corespunzătoare. Adică au loc teoremele:

$$FFpqCpq$$

implicația intuiționistă implică (în sens intuiționist) implicația clasică[45];

$$FTpqKpq$$

conjuncția intuiționistă implică (intuiționist) conjuncția clasică;

$$FOpqApq$$

disjuncția intuiționistă implică (intuiționist) disjuncția clasică.

Nici una dintre reciprocele acestor implicații nu are loc.

Functorii clasici C, K și A sînt mai slabi decît functorii intuiționiști corespunzători. Astfel, fiecare principiu de logică se dedublează într-unul „tare" și unul „slab".

---

[44] Din nou aceste definiții nu sînt întîmplătoare, ci inspirate de echivalențele clasice 4.63 și 4.64(*3.7).

[45] Avem aici o situație analogă celei create de Lewis în logica sa, în care am văzut că reconstituise întreaga logică bivalentă, iar această teoremă este teorema

$$14.1 \quad p \prec q \,.\prec.\, p \supset q$$

din logica implicației stricte (*4.6).

De pildă, principiul „tare" al terțiului exclus este $OpNp$ și intuiționiștii nu-l acceptă, pe cînd cel slab, care este $ApNp$, apare ca teză și în logica lui Heyting; în consecință, intuiționiștii trebuie să-l accepte[46].

În logica clasică, valabilitatea principiului terțiului exclus izvora din acceptarea următoarelor afirmații:

(1) O disjuncție „p sau q" este adevărată dacă cel puțin unul din termeni e adevărat.

(2) Negația unei propoziții false este adevărată.

(3) Orice propoziție este sau adevărată sau falsă.

Atunci oricare ar fi propoziția p, sau este adevărată, și atunci „p sau non-p" este de asemenea adevărată conform (1), sau este falsă, și pe baza lui (2) „non-p" este adevărată, prin urmare „p sau non-p", conform (3), este tot adevărată.

Afirmațiile (1) și (2) sînt evidente și au fost acceptate nu numai de logica clasică, ci și de intuiționiști. Dimpotrivă, principiul (3) — al bivalenței — a fost respins de logicile polivalente și, în particular, de cea intuiționistă. Cu toate acestea, principiul terțiului exclus poate fi demonstrat împreună cu toate celelalte principii clasice în sistemul intuiționist. Numai că sub forma:

$$ApNp$$

înțelesul lui depinde de înțelesul acordat celor doi functori: disjuncția și negația. Dar condițiile (1) și (2) sînt îndeplinite atît pentru A și N cît și pentru O și N; deci în ambele cazuri ele pot fi numite „disjuncție" și „negație"[47].

Astfel calculul intuiționist operează cu mai multe feluri de conective, fiecare cu înțelesul lui determinat. El este deci mai bogat și mai puternic decît cel clasic. Ceea ce-l

---

[46] *On the Intuitionistic Theory of Deduction*, pp. 206—207.

[47] Este discutabil faptul că în interpretarea lui Gödel, ca și în cea a lui Łukasiewicz, negația intuiționistă și cea clasică se confundă, părînd a urma de aici că nu există de fapt între ele nici o deosebire de sens. Căci după cum am văzut (*6.1), negația e însuși punctul sensibil atacat de Brouwer în discuția terțiului exclus. Această lacună o vor umple, după cum vom vedea în paragraful următor, interpretările modale, unde $\neg$, negația intuiționistă, devine imposibilitatea lui Lewis $\sim\Diamond$.

face pe Łukasiewicz să afirme: „Mie mi se pare că printre sistemele logice polivalente cunoscute pînă în prezent teoria intuiționistă este cea mai intuitivă și elegantă"[48].

* 6.11. Compararea logicii intuiționiste cu cea a lui Lewis

Același logician Becker [49] interpretează modal logica intuiționistă, și anume făcînd „traducerea" conectivelor lui Heyting în conectivele lui Lewis, după următorul „dicționar":

Heyting : $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$,

Lewis : $\supset$, ., $\vee$, $\sim \Diamond$

Observăm că în această traducere, implicației intuiționiste îi corespunde implicația *materială* (nu strictă) definită de Lewis în cadrul logicii sale (*4.6, definiția 14.01), iar negației intuiționiste — *imposibilitatea*. Astfel Becker a arătat că primele zece axiome intuiționiste sînt teze în S3.

Pentru primele nouă — care nu conțin negația — acest lucru este evident, căci am arătat că traducînd implicația, conjuncția și disjuncția intuiționistă, așa cum am făcut-o, axiomele intuiționiste devin teze clasice, iar logica bivalentă e inclusă complet în S3.

Să ne ocupăm, așadar, de ultimele două. A zecea, tradusă în simboluri lewisiene, va fi:

$10'$. $\sim \Diamond p \supset (p \supset q)$

Dar noi am demonstrat în S2 (deci și în S3) teorema

19.74 $\sim \Diamond p \,.\prec.\, p \prec q$,

deci, cu atît mai mult, teorema $10'$, care se obține din ea prin înlocuirea implicației stricte cu cea materială.

[48] *On the Intuitionistic Theory of Deduction*, p. 208.
[49] *Zur Logik der Modalitäten*.

În sfîrşit, a unsprezecea va fi:

11′ $p \supset q \,.\, p \supset \sim \Diamond q : \supset . \sim \Diamond p$

Deoarece avem

18.41 $\sim \Diamond q \prec \sim q,$

implicaţia materială are şi ea loc:

$$\sim \Diamond q \supset \sim q$$

De unde, în baza logicii clasice (şi implicit a celei lewisiene),

$$p \supset \sim \Diamond q \,.\, \supset . \, p \supset \sim q \qquad (1)$$

Convertind implicaţiile stricte ale teoremei

17.52 $p \prec q \,.\, p \prec \sim q : \prec . \sim \Diamond p$

în implicaţii materiale, obţinem teza:

$$p \supset q \,.\, p \supset \sim q : \supset . \sim \Diamond p \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) deducem că 11′ este şi ea validă. Aşadar, toate axiomele şi toate teoremele intuiţioniste devin, astfel tălmăcite, teoreme ale lui S3[50].

A. Tarski şi McKinsey, care au studiat mai multe asemenea „tălmăciri" în logica implicaţiei stricte[51], au găsit şi următoarea interpretare posibilă.

Heyting : p , $\neg$, $\rightarrow$

Lewis : $\Box p$, $\sim \Diamond$, $\prec$

Adică variabilele propoziţionale simple sînt prefixate de simbolul necesităţii, negaţia intuiţionistă este înlocuită prin imposibilitate, iar implicaţia intuiţionistă prin implicaţia strictă.

Teoremele intuiţioniste astfel traduse, care nu conţin disjuncţia şi conjuncţia, sînt adevărate în sistemul S4

[50] Becker nu ajunge să demonstreze acest lucru. Vom observa, mai mult, că toate cele 11 axiome intuiţioniste sînt valide în S1.

[51] *Some Theorems about the Sentential Calculi of Lewis and Heyting*, în „Journal of Symbolic Logic", XIII (1948), p. 13—14.

al lui Lewis. Mai mult chiar, o astfel de teoremă a lui S4 devine, utilizînd „dicționarul", o teoremă intuiționistă.

Iată un exemplu:
teza intuiționistă

$$p \to \neg\neg p$$

devine teorema lewisiană

$$\Box p \prec \sim \Diamond \sim \Diamond \Box p,$$

adică

$$\Box p \prec \Box \Diamond \Box p$$[52]

Reciproca însă

$$\neg\neg p \to p$$

conduce la

$$\Box \Diamond \Box p \prec \Box p,$$

care, după cum am arătat la timpul potrivit, nu are loc în S4 (deși are loc în S5). Iată, prin urmare, cum S4 poate fi un cadru potrivit pentru o interpretare a logicii intuiționiste.

În încheiere vom face o singură remarcă. Toate aceste interpretări se referă la sistemul formal heytingian al logicii intuiționiste și nu la însuși modul de gîndire intuiționist. Cît privește potrivirea dintre acestea, Heyting mărturisește că nu poate fi niciodată demonstrată pe o cale riguroasă[53]. Unii chiar au pus-o — măcar parțial — sub semnul întrebării. Johansson[54], spre exemplu, a construit, după cum vom vedea, un sistem axiomatic de calcul propozițional — „calculul minimal" — fără axioma 4.1 a lui Heyting

$$\neg p \to (p \to q),$$

în care aceasta este privită chiar ca o propoziție falsă.

---

[52] Teza 15 în sistemul lui Lewis S4; aceasta nu e decît „axioma lui Brouwer", în care s-a înlocuit p cu $\Box p$ (*4.12, teza 24).

[53] **A. Heyting,** *Intuitionism*, p. 112.

[54] **I. Johansson,** *Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus*, în „Compositio mathematica", 4 (1936), pp. 119–136.

* 6.12. Logica problemelor a lui Kolmogorov

Plecînd de la logica intuiționistă, A. Kolmogorov a avut ideea interesantă de a încerca să schematizeze soluțiile problemelor, după modelul schemelor demonstrative ale logicii formale[55]. Spre exemplu, principiului silogismului îi corespunde următorul principiu, referitor la probleme (a, b, c fiind, de data aceasta, probleme): dacă putem deduce soluția lui b din soluția lui a și soluția lui c din soluția lui b, atunci putem deduce soluția lui c din soluția lui a[56].

Kolmogorov începe prin a funda un calcul al problemelor *(Aufgabenrechnung)*, fără a face presupuneri de teoria cunoașterii, în particular fără a face ipoteze intuiționiste (deși în continuare îl va considera și din acest punct de vedere). Este de remarcat că, edificînd o logică a problemelor, Kolmogorov ajunge la concluzia că ea coincide cu logica intuiționistă. Pe scurt, o logică a problemelor, independentă de orice ipoteză, construită pur formal, conduce la un calcul identic cu cel al lui Heyting. Vom vedea ce interpretare acordă Kolmogorov acestei coincidențe.

Să începem, odată cu Kolmogorov, nu prin a defini ce e o problemă, ci prin a da cîteva exemple de probleme.

1. Să se găsească patru numere întregi astfel încît relația următoare să fie valabilă (teorema lui Fermat):

$$x^n + y^n = z^n \qquad n > 2$$

2. Să se demonstreze falsitatea teoremei lui Fermat.
3. Să se ducă prin trei puncte un cerc.

---

[55] **A. Kolmogorov**, *Zur Deutung der intuitionistischen Logik*, în „Mathematische Zeitschrift", 35. Band, 1932.

[56] *Ibidem*, p. 58.

Este cazul să menționăm aici comunicarea lui **Eugeniu Speranția:** *Remarques sur les propositions interogatives*, *Projet d'une „Logique du problème"*, în „Actes du Congrès international de philosophie scientifique", VII, Logique, Hermann, 1936. E. Speranția preconizează în această comunicare o logică a problemei, foarte interesantă, dar din alt punct de vedere decît al lui Kolmogorov.

4. Presupunînd că s-a dat o rădăcină a ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, să se găsească celelalte.

5. Presupunînd că numărul π este exprimat rațional

$$\pi = \frac{n}{m},$$

să se găsească o expresie analogă pentru numărul e.

Între aceste probleme se poate constata o diferență. Problema 5, de pildă, este imposibilă și prin urmare fără conținut *(inhaltlos)*. Kolmogorov va considera în restul studiului său dovada că o problemă este fără conținut, ca o soluție[57].

Iată dar exemple de probleme și de ceea ce înseamnă soluțiile lor.

Problemele vor fi notate cu litere latine minuscule: $a, b, c, d, \ldots$

Problema „să se găsească soluția la amîndouă problemele a și b" va fi notată:

$$a \wedge b$$

Problema „să se soluționeze cel puțin o problemă din problemele a sau b" va fi notată:

$$a \vee b$$

În sfîrșit, notația

$$a \supset b$$

va însemna: „presupunînd că soluția lui a este dată, să se rezolve b", sau, ceea ce este același lucru, „să se deducă soluția lui b din soluția lui a".

Tot astfel

$$\neg a$$

va însemna: „presupunînd că rezolvarea lui a este dată, să obținem o contradicție".

Formulele căpătate, articulînd diverse probleme $a, b, c\ldots$ prin semnele $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, vor reprezenta tot probleme. O astfel de combinație de probleme se va scrie pe scurt:

$$p(a, b, c\ldots).$$

[57] **A. Kolmogorov,** *op. cit.*, p. 59.

Dacă x este o variabilă oarecare și $a(x)$ o problemă, al cărei sens depinde de x, formula:

$$(x) \,.\, a(x)$$

va însemna: „să se găsească o metodă generală pentru rezolvarea lui $a(x)$ pentru fiecare valoare particulară a lui x". Pentru $p(a, b, c, \ldots)$ problema aceasta poate fi indicată mai pe scurt astfel:

$$\vdash p(a, b, c \ldots)$$

în loc de:

$$(a)(b)(c) \ldots p(a, b, c \ldots)$$

Adică, să se găsească o metodă generală pentru rezolvarea lui $p(a, b, c \ldots)$, pentru fiecare alegere a variabilelor $a, b, c \ldots$

Se vede că semnul „$\vdash$" are alt sens aici, dar, cum vom vedea, conduce la aceleași reguli de calcul. În calculul propozițional obișnuit, semnele $\wedge, \vee, \supset, \neg$ erau exprimabile unele în funcție de altele; ele erau independente în logica lui Heyting și sînt independente și aici, după cum arată sensul lor.

Scopul calculului problemelor este de a da o metodă generală de rezolvare a problemelor de forma $\vdash p(a,b, c \ldots)$[58].

Va trebui, pentru aceasta, să presupunem că rezolvarea cîtorva probleme elementare este dată. În acest scop vom lua două grupe de probleme ca *postulate* (grupa A și B). Kolmogorov numerotează aceste postulate cu aceleași numere ca și Heyting, deși acestea sînt acceptate în afară de motivele logicii intuiționiste.

Grupa A.

2.1 $\vdash \,.\, a \supset a \wedge a$

2.11 $\vdash \,.\, a \wedge b \supset b \wedge a$

2.12 $\vdash \,.\, a \supset b \,.\, \supset \,.\, a \wedge c \supset b \wedge c$

2.13 $\vdash \,.\, a \supset b \,.\, \wedge \,.\, b \supset c \,.\, \supset \,.\, a \supset c$

[58] *Ibidem*, p. 61.

2.14 $\vdash . b \supset . a \supset b$

2.15 $\vdash . a \wedge . a \supset b . \supset b$

3.1 $\vdash . a \supset a \vee b$

3.11 $\vdash . a \vee b \supset b \vee a$

3.12 $\vdash . a \supset c . \wedge . b \supset c . \supset . a \vee b \supset c$

4.1 $\vdash . \neg a \supset . a \supset b$

4.11 $\vdash . a \supset b . \wedge . a \supset \neg b . \supset \neg a$

Aceste postulate sînt evidente. Într-adevăr, să luăm unul, de exemplu 2.12:

$$\vdash . a \supset b . \supset . a \wedge c \supset b \wedge c$$

Dacă soluția problemei b se deduce din aceea a problemei a, atunci soluția problemei $b \wedge c$ se deduce din aceea a problemei $a \wedge c$. Fie $a \wedge c$ soluționată: atunci și a și c sînt soluționate; din rezolvarea lui a se deduce aceea a lui b; cum soluția lui c este dată, urmează că și $b \wedge c$ este soluționată. Propoziția 2.12 este generală.

Postulatul 4.1 înseamnă că soluția lui a nu este posibilă și problema $a \supset b$ este fără conținut.

Grupa B.

Grupa a doua conține trei probleme:

I. Dacă $\vdash . p \wedge q$ este rezolvată, să se rezolve $\vdash p$.

II. Dacă $\vdash p$ și $\vdash p \supset q$ sînt rezolvate, să se rezolve $\vdash q$.

III. Dacă $\vdash p\,(a, b, c...)$ este rezolvată, să se rezolve $\vdash p\,(q, r, s,...)$.

Aceste probleme nu se pot exprima complet în simboluri.

Regulile calculului problemelor sînt următoarele:

1. Vom scrie pe lista problemelor rezolvate problemele grupei *A*.

2. Dacă pe lista noastră se găsește $\vdash . p \wedge q$, atunci este îngăduit să punem și $\vdash p$.

3. Dacă se găsesc pe listă $\vdash p$ și $\vdash . p \supset q$, atunci putem scrie și $\vdash q$.

Analogia acestor reguli cu acelea din calculul propozițional este evidentă.

4. Dacă $\vdash p\,(a, b, c...)$ se află pe listă, iar q, r, s sînt funcții de probleme (combinații logice de probleme elementare), atunci putem scrie pe listă și $p(q, r, s...)$ (regula substituției).

Din toate acestea rezultă imediat propozițiile respective din logica lui Heyting:

4.3 $\vdash . a \supset \neg \neg a$

4.2 $\vdash . a \supset b . \supset . \neg b \supset \neg a$

4.32 $\vdash . \neg \neg \neg a \supset \neg a$

Dacă adăugăm și:

$$\vdash . a \vee \neg a, \tag{1}$$

care este principiul terțiului exclus, avem sistemul complet, corespunzător logicii clasice a propozițiilor; (1) are însă următorul înțeles în logica problemelor: „să se dea o metodă generală pentru ca pentru oricare problemă a să se găsească o soluție, sau, din presupunerea acestei soluții, să se deducă o contradicție".

Kolmogorov conchide: „Dacă cititorul nostru nu se ține drept atotștiutor, atunci va concede că propoziția (1) nu se poate afla pe lista problemelor rezolvate"[59].

Se poate vedea ușor că următoarea formulă remarcabilă:

4.8 $\vdash . \neg \neg (a \vee \neg a)$

se poate rezolva după cum arată calculul lui Heyting. Nu tot așa este cu dubla negație

$$\vdash . \neg \neg a \supset a, \tag{2}$$

deoarece aceasta împreună cu 4.8 conduce la (1). Așadar, nici principiul terțiului exclus, nici principiul dublei negații nu sînt valabile în logica problemelor, ca și în logica propozițiilor a lui Heyting.

În concluzie, calculul problemelor arată că unele principii clasice nu sînt valabile fără a introduce considerațiile

[59] *Ibidem*, p. 63.

intuiționiste. Acest rezultat este extrem de important, dar nu a fost îndeajuns valorificat de logicieni. Numai că, edificînd o logică a problemelor și aplicîndu-i calculul clasic, cîteva din propozițiile clasice trebuie eliminate. Această interpretare ingenioasă a logicii intuiționiste, în termeni de probleme, dispensează logica lui Heyting de principii luate în afară de logica clasică[60]. Kolmogorov a căutat să scape de principiile intuiționiste, introducînd un calcul al problemelor, astfel că formulele lui Heyting capătă cu totul alt sens[61].

* 6.13. Alte cercetări ale școlii intuiționiste

Modul de gîndire intuiționist a fost adoptat și dezvoltat, în special de matematicieni, în cadrul unei școli intuiționiste ale cărei contribuții, îndeosebi în matematică, s-au impus lumii întregi. Aici însă ne ocupăm de cercetările de logică ale intuiționiștilor, și anume ne vom referi în cele ce urmează la două dintre cele mai interesante: *calculul minimal al lui Johansson* și *logica matematicii intuiționiste fără negație a lui Griss*[62].

---

[60] **A. Errera** a făcut cîteva obiecții sistemului lui Kolmogorov în *Réponse a quelques objections*, în „l'Enseignement mathématique", tome 34, 1935, pp. 103—111. Obiecția, care ni se pare că ar merita atenție, e următoarea: dovada că o problemă nu are sens poate fi considerată ca soluția sa? Într-un asemenea caz, nu există nici problemă și nici soluție, prin urmare Kolmogorov introduce o semnificație convențională.

[61] **P. Février** a generalizat ideea lui Kolmogorov atașînd fiecărui calcul propozițional cîte un calcul asociat al problemelor *(Rapports entre le calcul des problèmes et le calcul des propositions*, în „C.R. de l'Acad. des Sciences", vol. 224, Paris, 1947).

[62] Un material informativ bogat în legătură cu dezvoltarea logicii și matematicii intuiționiste conține lucrarea lui **Heyting,** *Les fondements des mathématiques. Intuitionisme. Théorie de la demonstration*, Paris-Louvain, 1955.

Într-un articol publicat în 1936, I. Johansson reia sistemul intuiționist al lui Heyting, dînd la o parte axioma 4.1[63]. După cum observă el, formulele:

$$q \to (p \to q)$$
$$\neg p \to (p \to q),$$

amîndouă luate de Heyting drept axiome (2.14 și 4.1), arată că, în afară de cazul cînd q este o consecință logică a lui p, mai scriem $p \to q$ și cînd:

q este propoziție adevărată (teoremă);

p este o propoziție falsă ($\neg p$ este o teoremă).

Pe cînd primul dintre aceste cazuri este după părerea lui Johansson în acord cu accepția noțiunii de implicație, al doilea reprezintă însă o lărgire cam greu de acceptat a acestei noțiuni[64].

Johansson compară calculul minimal cu celelalte logici. Să considerăm implicațiile:

$$(\neg p \vee q) \to (p \to q)$$
$$(p \to q) \to (\neg p \vee q)$$

Ambele erau verificate în logica clasică de implicația materială (* 3.7, teza 4.6). Implicația strictă a lui Lewis verifica doar pe a doua (*4.6, teza 14.1). Dimpotrivă, implicația intuiționistă a lui Heyting verifică doar pe prima (*6.6, teza 4.46). În calculul minimal însă, nici una dintre cele două nu este valabilă.

Johansson și-a numit calculul său „minimal", datorită faptului că nu există nici un alt sistem mai restrîns care să conțină negația și toate teoremele din logica lui Heyting scrise numai cu ajutorul functorilor $\to, \vee, \wedge$. În el se pot demonstra:

$\vdash \neg (p \wedge \neg p)$

principiul contradicției,

$\vdash (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$

[63] **I. Johansson,** *Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus*, în „Compositio Mathematica", 4 (1936), pp. 119—136.

[64] *Ibidem*, p. 119.

principiul contrapoziției,

$$\vdash p \to \neg\neg p$$

axioma lui Brouwer; conversa ei, nefiind demonstrabilă în logica lui Heyting, nu va fi nici aici. Totuși, în timp ce afirmarea (postularea) ei echivala acolo, după cum am văzut, cu afirmarea terțiului exclus, în calculul minimal ea echivalează cu afirmarea a două principii, și anume:

$$p \vee \neg p$$

terțiul exclus și

$$p \wedge \neg p \to q$$

o contradicție, $p \wedge \neg p$, implică orice. Aceasta din urmă, deși teoremă intuiționistă, odată cu excluderea axiomei 4.1 își pierde valabilitatea. Postularea terțiului exclus fără postularea acesteia face din calculul minimal nu logica bivalentă așa cum ne-am aștepta, ci o logică asemănătoare cu cea a lui Lewis[65].

Una dintre trăsăturile cele mai interesante ale calculului lui Johansson este, așa cum a observat Prior[66], aceea că reține ca teoremă doar unul din paradoxele implicației „o propoziție adevărată este implicată de orice propoziție". După cum s-a observat mai tîrziu, el poate prezenta interes și din punctul de vedere al aplicațiilor în fizică).

O altă linie de cercetări, de mult mai mare amploare și mai profundă semnificație, a constituit-o în școala intuiționistă studiul matematicilor intuiționiste fără negație. Început de G.F.C. Griss în 1944[67], a fost continuat apoi tot de acesta într-o serie de articole publicate între 1946 și 1951 în revista olandeză „Indagationes Mathematicae"[68].

---

[65] *Ibidem*, p. 130.

[66] **A. N. Prior**, *Formal Logic*, p. 259.

[67] **G. F. C. Griss**, *Negatieloze intuitionistische wiskunde*, în Verslagen Akad. Amsterdam, 53, pp. 261—268.

[68] Volumele: 8, pp. 675—681, 12, pp. 108—115; 13, pp. 193—200, 452—471.

Logica acestor matematici a fost studiată mai intîi tot de Griss, care a încercat să o formalizeze[69]. Ulterior o serie de alte cercetări și-au adus aportul în această direcție[70]. Noi ne vom mărgini doar la cîteva considerații de ordin strict general.

Griss este de acord cu Brouwer în ceea ce privește faptul că orice noțiune matematică își are originea într-o construcție matematică ce poate fi realizată. Dacă construcția este imposibilă, noțiunea nu poate fi clară.

Cînd fac matematică plec de la propoziții adevărate ca să ajung tot la propoziții adevărate. Este adevărat că se poate întîmpla ca rezultate negative să ne sugereze soluții pozitive. A pune probleme și a cere soluții sînt pentru Griss însă ocupații prematematice[71].

Astfel, într-un sistem matematic nu pot apărea decît propoziții adevărate. În el negația nu-și găsește locul. Să vedem ce consecințe poate avea aceasta pentru logica unor asemenea matematici.

Vom spune de la început că ea este foarte dificil de formalizat, căci, după cum a observat Heyting, din pricină că doar propozițiile adevărate au sens, nici nu există propriu-zis un calcul cu propoziții[72].

Cunoscînd aceste piedici, Griss se mărginește la cîteva indicații și remarci cu privire la o eventuală formalizare a unei asemenea logici.

---

[69] *Logique des mathématiques intuitionistes sans négation*, în: C.R. Acad. Sciences, Paris, 227, pp. 946—947 și *The logic of negationless intuitionistic mathematics*, în „Indagationes mathematicae", 13, pp. 41—49.

[70] **P. Destouches — Février,** *Logique de l'intuitionnisme sans négation et logique de l'intuitionnisme positif* în „C.R. Acad. Sciences", Paris, 226 (1948), pp. 38—39.

P. C. G. Gilmore, *The effect of Griss criticism of the intuitionistic logic on deductive theories formalized within the intuitionistic logic*, în „Indagationes mathematicae", 15 (1953), pp. 162—187.

P. G. J. Vredenduin, *The logic of negationless mathematics*, în „Compositio mathematica" 11 (1953) pp. 204—277.

V. Valpola, *Ein System der negationslosen Logik mit ausschliesslich realisierbaren Prädikaten*, în „Acta philosophica Fennica" 9 (1955), pp. 1—247.

[71] *Logique des mathématiques intuitionnistes sans négation*, p. 946.

[72] **A. Heyting,** *Intuitionism*, p. 122.

Mai întîi ea va fi diferită de logica obținută prin înlăturarea teoremelor din calculul lui Heyting, care conțin negația. Aceasta, deoarece se modifică însăși interpretarea formulelor. *Implicația* $p \to q$ va avea înțelesul său natural: q urmează din p, p este adevărat astfel încît q este adevărat. De asemenea *conjuncția*. Înțelesul *disjuncției* însă trebuie analizat cu grijă. Expresia „propoziția p este adevărată sau propoziția q este adevărată" nu are sens aici, unde n-avem de-a face decît cu propoziții adevărate[73].

Nu vom reține astfel, din logica intuiționistă, decît propozițiile referitoare la implicație și conjuncție, cu o precizare. Axiomele pe care le acceptăm trebuie să reprezinte raționamente utilizate efectiv în matematică. Dar, un asemenea raționament nu are niciodată forma axiomei 2.14 din logica lui Heyting:

$$\vdash q \to (p \to q),$$

fapt pentru care o înlocuim prin

$$\vdash p \wedge q \to p$$

La fel, axioma 2.15:

$$\vdash p \wedge (p \to q) \to q$$

poate fi omisă căci în $p \to q$, q nu reprezintă niciodată o propoziție falsă. Așa încît, Griss pleacă de la următoarele cinci postulate:

2.1 $p \to p \wedge p$

2.11 $p \wedge q \to q \wedge p$

2.12 $(p \to q) \to (p \wedge r \to q \wedge r)$

---

[73] Iată ce spune Griss: „...nu am reușit să-i atribui un sens (disjuncției — *n.n.*) în logica propozițiilor, fără a face să intervină noțiunea de specie (...). Disjuncția nu afirmă nimic despre un caz determinat (particular), ci ne dă posibilitatea să demonstrăm o teoremă pentru toate elementele unei mulțimi V, demonstrînd această teoremă pentru elementele a două specii a căror reuniune este identică cu V." (*Logique des mathématiques intuitionnistes sans négation*, p. 947).

2.13 $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$

22.16 $p \wedge q \to p$

şi următoarele trei reguli de deducţie:

1.11 Din formulele P şi Q rezultă $P \wedge Q$.

1.12 Din P şi $P \to Q$ rezultă Q.

1.13 Din R şi $P \to R$ rezultă $P \to Q \wedge R$ (la fel $R \wedge Q$).

Iată şi cîteva teoreme care se pot astfel deduce:

2.21 $p \to p$

2.22 $p \wedge q \to q$

2.221 $(p \to q) \to (r \wedge p \to r \wedge q)$

2.23 $(p \to q) \wedge (r \to s) \to (p \wedge r \to q \wedge s)$

2.241 $(p \to q) \wedge (p \to s) \to (p \to q \wedge s)$

2.242 $(p \to q \wedge r) \to (p \to q) \wedge (p \to r)$

2.28 $(p \to r) \to (p \wedge q \to r)$

2.3 $(p \wedge q) \wedge r \to p \wedge (q \wedge r)$

Utilizînd pentru echivalenţă simbolul „$\leftrightarrow$" şi definindu-l în modul bine cunoscut:

2.03 $p \leftrightarrow q \overline{D} (p \to q) \wedge (q \to p)$,

Griss deduce următoarele teoreme:

2.5 $p \leftrightarrow p$

2.51 $(p \leftrightarrow q) \to (q \leftrightarrow p)$

2.52 $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \to p \leftrightarrow r$

Dezvoltarea sistemului său conduce şi la alte dificultăţi decît cele menţionate mai înainte. Astfel, în calculul cu funcţii, spre exemplu, nu au sens, din punctul de vedere al lui Griss, conjuncţia a două funcţii:

$$fx \wedge gx$$

ale căror domenii de definiţie nu au nici un element comun. Ea ar reprezenta atunci o funcţie avînd un domeniu de

definiție vid (egal cu intersecția celor două domenii, ale lui f și respectiv g). Cu alte cuvinte o contradicție, ceea ce Griss nu admite în logica sa. Toate acestea însă nu ies la iveală, cum a subliniat chiar el, decît printr-un studiu adîncit al însăși matematicii fără negație, studiu pe care l-a efectuat cu precădere.

Tot pentru construirea unei matematici afirmative, dar pe alte poziții, și-a efectuat cercetările și un alt matematician intuiționist, D. van Dantzig[74], la care, avînd un caracter mai special, nu ne vom opri.

O contribuție interesantă a adus în logica intuiționistă și profesorul român Gr. C. Moisil, care a demonstrat că sînt valabile din punct de vedere intuiționist următoarele forme de silogism:

Dacă $\vdash \neg\neg P$ și $\vdash \neg\neg (P \supset Q)$ atunci $\vdash \neg\neg Q$

Dacă $\vdash \neg\neg (P \supset Q)$ și $\vdash \neg\neg (Q \supset R)$ atunci $\vdash \neg\neg (P \supset R)$[75].

* 6.14. Considerații generale

Concepția intuiționistă ne-a interesat aici numai în legătură cu logica. Ea are însă o extensiune mai mare, privind întreaga matematică, nereductibilă pentru intuiționiști numai la structuri formale, fiindcă are o semnificație și în conținut și se naște printr-o activitate constructivă. Pentru intuiționiști, matematica este o activitate originară a intelectului omenesc și, prin urmare, din punctul lor de vedere ea nu poate să presupună o concepție filozofică și nici una logică. Logica nu este fundamentul pe care stau matematicile, subliniază Heyting, căci o construcție matematică trebuie să fie pentru minte

[74] **D. van Dantzig**, *On the principles of intuitionistic and affirmative mathematics*, în „Indagationes mathematicae", 9 (1947), pp. 429—440, 506—517.

[75] **Gr. C. Moisil**, *Sur le syllogisme hypothétique dans la logique intuitionniste*, în „Journal des mathematiques pures et appliquées", Paris, tome XVII (1938), pp. 197—202.

un dat imediat și rezultatul său să se prezinte atît de clar încît să nu-i trebuiască nici un fundament.

Atunci însă ce reprezintă logica intuiționistă? Iată cum răspunde însuși Heyting[76]. Să notăm cu A proprietatea unui întreg de a fi divizibil cu 8, cu B proprietatea de a fi divizibil cu 4, cu C proprietatea de a fi divizibil cu 2. În loc de $8a$ putem scrie $4 \times 2a$; prin această construcție matematică, P, observăm că proprietatea A implică B ($A \rightarrow B$). O construcție similară, Q, ne arată că $B \rightarrow C$. Efectuînd mai întîi P și apoi Q (juxtapunînd P și Q) obținem $8a = 2 \times (2 \times 2a)$ care arată că $A \rightarrow C$. Acest proces rămîne valid dacă în loc de A, B, C luăm niște proprietăți arbitrare: dacă construcția P arată că $A \rightarrow B$ și construcția Q arată că $B \rightarrow C$, atunci juxtapunerea lui P și Q arată că $A \rightarrow C$. Și astfel am obținut o teoremă logică (este vorba de principiul silogismului numerotat între tezele intuiționiste cu 2.13). Procesul prin care a fost obținută ne arată că ea nu diferă esențial de teoremele matematice, ci este doar mai generală. Astfel orice teoremă de logică este o teoremă matematică extrem de generală și, prin urmare, logica face parte din matematici. Deci nu-i poate servi în nici un caz drept fundament.

Nu numai atît, matematica este pentru intuiționiști independentă și de limbă, în mod principial. Limba nu poate reda decît în mod inexact procedeele intelectuale matematice, zice Brouwer, și între matematică și limba matematică există o despărțire netă. Dacă ținem seama de ideea fundamentală intuiționistă, că limba și, prin urmare, formalismul matematic nu sînt decît un mijloc aproximativ de a reda procesele intelectuale matematice, care au loc în ele însele, fără exprimarea lor formală, atunci se vede că logica intuiționistă nu poate fi considerată în ea însăși ca „sistemul" logicii intuiționiste. Ea este numai un mijloc aproximativ de a ne apropia de modul de a gîndi intuiționist. De aceea și observațiile care s-au făcut pro și contra acestui sistem privesc mai mult dezvoltarea formală a acestei logici și nu concepția propriu-zisă despre logică a acestei școli.

---

[76] **A. Heyting**, *Intuitionism*, p. 6.

7
Logica modală

* 7.1. Cercetările lui Gr. C. Moisil

De-a lungul bogatei sale activități, profesorul român Gr. C. Moisil a publicat o serie de cercetări privind cele mai variate domenii din logica matematică. Am avut deja prilejul să menționăm contribuțiile sale în studiul logicilor cu mai multe valori (neclasice), ca și în logica intuiționistă.

În ultimii ani, profesorul Gr. C. Moisil s-a ocupat de problema aplicației logicilor cu mai multe valori, și îndeosebi de aplicațiile legate de teoria mecanismelor automate. Vom avea prilejul să tratăm și noi, pe scurt, acest subiect, în capitolul 9, special dedicat problemei aplicațiilor.

Aici vrem să urmărim însă un capitol special în cercetările logicianului român: logica modală. El este autorul unui sistem de logică modală, avînd legături cu o parte din sistemele studiate de noi pînă acum[1]. Vom expune acest sistem în cele ce urmează.

---

[1] Sistemul său este expus în lucrarea *Logique Modale*, publicată în „Disquitiones mathematicae et physicae", t. II, fasc. I, 1942, pp. 3—98 și republicată în *Încercări vechi și noi de logică*

* 7.2. Idei primitive; definiţii; functorul *S*

Menţionăm că Moisil pleacă de la structura modală a propoziţiilor, care conduce la o logică polivalentă. Simbolismul utilizat de el este acela al lui Łukasiewicz, fără paranteze, şi anume:

Apq : disjuncţia logică „p sau q".
Kpq : conjuncţia logică „p şi q".
Cpq : implicaţia logică „p implică q".

A, K, C sînt numiţi, cum am văzut la logica lui Łukasiewicz, *functori*.

Pentru ideile de modalitate, Moisil introduce următorii functori unari[2], care atribuiesc, prin convenţie, unei propoziţii p modalitatea respectivă:

η = imposibilitatea; γ = contingenţa; μ = posibilitatea; ν = necesitatea; N = negaţia. Aşadar:

$$\eta p = p \text{ este imposibil}$$
$$\gamma p = p \text{ este contingent}$$
$$\mu p = p \text{ este posibil}$$
$$\nu p = p \text{ este necesar}$$
$$Np = \text{non-}p \ (p \text{ este fals}).$$

Dacă o propoziţie p nu este precedată de vreun functor, atunci ea poate fi considerată ca adevărată, deşi reprezintă şi o variabilă (nu ca o aserţiune). Să introducem, odată cu autorul, un nou functor S.

Există propoziţii din limbajul obişnuit care fac uz de copula „fără". De exemplu:

---

neclasică, Bucureşti, Ed. ştiinţifică, 1965, pp. 218—328. Citatele le vom face după aceasta din urmă. De logica sa modală pot fi legate şi cercetările sale anterioare publicate în *Remarques sur la logique modale du concept*, în „Analele Academiei Române", seria a III-a, t. XVI, Mem. 12, 1941, republicată şi ea în *Încercări vechi şi noi de logică neclasică*, pp. 90—128.

[2] Functorii A, K, C sînt functori binari, cu două propoziţii p şi q, pe cînd functorul unar se referă numai la o singură propoziţie.

„Cavalerul *fără* frică și *fără* pată" etc. Vom putea deci întîlni, în general, două propoziții p și q legate prin copula „fără": „p fără q". Pentru această legătură, Moisil introduce[3] un functor S, astfel încît:

$$Spq = \text{„}p \text{ fără } q\text{"}$$

În logica bivalentă, functorul S poate fi construit foarte simplu, definindu-l cu ajutorul functorilor K și N; „Spq" semnificînd „p fără q", adică „p și non-q", el poate fi scris:

$$Spq = KpNq$$

Interpretarea modală însă a lui S ne duce la o semnificație mai puțin rigidă și care va fi „p poate fără q". S are, astfel, semnificația modală „posibil fără".

Cu ajutorul functorilor C și S, Moisil construiește ideile de adevăr și fals.

Adevărul va fi reprezentat de:

$$Cxx$$

sau:

$$\text{„}x \text{ implică } x\text{"}$$

Falsul va fi

$$Sxx$$

sau[4]:

$$\text{„}x \text{ poate fără } x\text{"}$$

Să definim acum modalitățile. Propoziția „x implică falsul", înseamnă că x este absurd sau este imposibil. Am definit însă falsul ca fiind „Sxx". Așadar, propoziția „x implică falsul" va fi reprezentată simbolic de $CxSxx$. Cum în notația lui Moisil *imposibilitatea* unei propoziții x este desemnată de functorul η, avem:

$$\eta x = CxSxx$$

---

[3] **Gr. C. Moisil**, *Încercări vechi și noi de logică neclasică*, p. 218.
[4] *Ibidem*, p. 219.

Moisil definește apoi contingența astfel: „adevărul poate fără x". Cum adevărul a fost definit ca Cxx, urmează că putem scrie, pentru *contingență* (pentru care avem functorul γ):

$$\gamma x = SCxxx$$

Să iterăm acești functori, adică să-i aplicăm în mod repetat aceleiași propoziții x. Moisil pleacă de la propoziția naturală:

dubla imposibilitate echivalează cu posibilitatea.

Cum am definit imposibilitatea (functorul η), urmează că *posibilitatea* (functorul μ) poate fi definit ca o dublă imposibilitate:

$$\mu x = \eta\eta x$$

Rămîne să definim acum necesitatea. Aici este poate ideea cea mai interesantă a lui Moisil, deși paradoxală, că dubla contingență ($\gamma\gamma$) echivalează cu necesitatea (ν). Cu alte cuvinte, în simboluri:

$$\nu x = \gamma\gamma x$$

Intuiția noastră nu poate surprinde ideea că afirmația „e contingent că propoziția x este contingentă" înseamnă a spune că „x este necesar". Vom vedea totuși că Moisil găsește unele rezultate care se deduc din această definiție, așa încît ea devine plauzibilă[5].

* 7.3. Logica modală generală

În cele ce urmează nu vom urmări decît rezultatele importante la care ajunge autorul, fără a intra în dezvoltări și în chestiuni de detalii. Ceea ce distinge logica lui

[5] Moisil arată motivele mai intuitive care ar sprijini acceptarea acestui principiu în *Remarques sur la logique modale du concept*, pp. 16—17, în *Încercări vechi și noi de logică neclasică*, pp. 102—104.

Moisil de celelalte logici polivalente este, în fond, utilizarea functorului S[6].

Pentru a construi „logica modală generală", el consideră primele axiome, 1.1 — 1.9, ale lui Hilbert și Bernays, din așa-numita „logică pozitivă", adică numai acele axiome în care nu intră negația.

Iată aceste nouă axiome[7]:

1.1 $CxCyx$

1.2 $CCxCxyCxy$

1.3 $CCxyCCyzCxz$

1.4 $CKxyx$

1.5 $CKxyy$

1.6 $CCzxCCzyCzKxy$

1.7 $CxAxy$

1.8 $CyAxy$

1.9 $CCxzCCyzCAxyz$

Aceste axiome se citesc foarte ușor și cu unele din ele ne-am mai întîlnit. De exemplu 1.1 înseamnă: dacă x este adevărat, el este implicat de orice propoziție y (adevărată sau falsă); 1.4 spune că dacă conjuncția logică Kxy este adevărată atunci x este adevărat; etc.

Procedeele de demonstrație ale lui Moisil sînt următoarele: regula modului *ponens* și regula substituției.

---

[6] Este demn de observat că functorul S este introdus de Moisil și din considerații pur algebrice. Toziro Ogasawara a arătat (*Relation between logic and lattices*, în „Journal of science of the Hiroshima University", S.A. IX, 1939) că ansamblul propozițiilor logicii pozitive este o latice reziduată, a cărei reziduație este raportată la functorul de conjuncție; Moisil pleacă de la reziduația și în raport cu disjuncția, dată de functorul S.

[7] **D. Hilbert und P. Bernays,** *Grundlagen der Mathematik*, I.Springer, Berlin, 1934. Moisil le scrie însă în simbolismul lui Łukasiewicz.

În afară de aceasta, el întrebuințează și *scheme deductive* mai complicate decît substituția și *modus ponens*, asupra cărora însă nu putem insista aici[8].

Logica modală generală va fi construită cu ajutorul axiomelor 1.1—1.9, plus următoarele axiome referitoare la functorul S:

2.1 $CyASyxx$

2.2 $\dfrac{CzAxy}{CSzyx}$

Ce spun aceste axiome? 2.1 afirmă: dacă y este adevărat, atunci disjuncția logică „Syx sau x" este adevărată, ceea ce este evident. Într-adevăr, ea afirmă: „propoziția y implică y fără x sau x". Axioma 2.2 este o schemă deductivă. Ea se traduce: „dacă pentru un sistem de propoziții date x, y, z implicația $CzAxy$ este adevărată, atunci este adevărată și implicația $CSzyx$", ceea ce este, iarăși, evident. Într-adevăr, cînd se întîmplă că pentru trei propoziții x, y, z să avem $CzAxy$, adică dacă z este adevărat și „x sau y" este adevărat, urmează că putem scrie că „z fără y" adevărat implică x este adevărat[9].

Primele nouă axiome dau loc la întreaga logică „pozitivă", cu tot cortegiul de rezultate, ca legile comutative, legile distributive etc. Moisil demonstrează în tezele pe care le deduce din cele nouă axiome, la care adaugă axiomele 2.1 și 2.2, proprietățile functorului S, cum sînt cele ale distributivității etc. Nu vom urmări în acest calcul logica modală generală, ci vom trece la studiul modalităților.

---

[8] Pentru aceste scheme vedeți **Gr. C. Moisil**, *Logique modale*; **G. Gentzen**, *Untersuchungen über das logische Schliessen*, I și II („Mathematische Zeitschrift", Bd. XXXIX, 1935).

[9] Din punct de vedere algebric, aceste axiome, 2.1 și 2.2, exprimă faptul că S este o reziduație în raport cu A (**Gr. C. Moisil**, *op. cit.*, p. 233).

* 7.4. Imposibilitatea şi contingenţa în logica modală generală

Am văzut care este sistemul logic al lui Moisil, intitulat „logica modală generală".

Pentru a vedea cum se dezvoltă mai departe acest sistem, pe baza ideilor de modalitate, să considerăm definiţiile referitoare la imposibilitate şi contingenţă, pe care le introduce. Imposibilitatea unei propoziţii x a fost definită de autor (vezi *7.2) astfel:

$$\eta x = CxSxx$$

„Propoziţia x este imposibilă" echivalează cu „x implică falsul" (Sxx). Această echivalenţă se desface în două implicaţii reciproce:

3.1 $C\eta xCxSxx$

3.2 $CCxSxx\eta x$

Cele două propoziţii spun respectiv: „dacă x este imposibil, atunci x implică falsul"; „dacă x implică falsul, atunci x este imposibil".

Am văzut că Moisil a definit contingenţa ca fiind „adevărul poate fără x":

$$\gamma x = SCxxx,$$

care se desface şi ea în două implicaţii:

3.3 $C\gamma xSCxxx$

3.4 $CSCxxx\gamma x$

Aceste implicaţii se citesc tot aşa de uşor ca şi primele.

Se observă imediat că imposibilitatea implică contingenţa:

3.5 $C\eta x\gamma x$

De asemenea falsul este imposibil (să fie adevărat):

3.6 ηSxx

Falsul mai poate fi definit prin principiul contradicției:

3.32 $\eta K x \eta x$,

care se citește: „este imposibil ca x să fie adevărat și în același timp imposibil".

În sfîrșit, se poate enunța un principiu modal al terțiului exclus[10]:

3.18 $A \gamma x x$

„Propoziția x sau este adevărată, sau este contingentă". Să remarcăm că numai propozițiile care definesc imposibilitatea și contingența sînt definiții (3.1, 3.2, 3.3, 3.4), restul sînt teoreme.

Pe baza acestor definiții și a axiomelor, Moisil deduce o serie de teze modale[11] (propozițiile 3.5—3.78), interesante, dar pe care nu le putem urmări mai departe.

* 7.5. Necesitatea și posibilitatea

Iterația functorilor „γ" (contingența) și „η" (imposibilitatea) ne-a permis să definim posibilitatea și necesitatea.

Într-adevăr, Moisil pune, cum am văzut:

$$\mu x = \eta \eta x$$

$$\nu x = \gamma \gamma x$$

Definiția a doua spune că „x este necesar" echivalează cu dubla lui contingență.

În felul acesta, ne găsim în fața următoarelor definiții care vor îngădui calculele cu modalitățile „necesar" și „posibil":

4.1 $C \mu x \eta \eta x$

4.2 $C \eta \eta x \mu x$

[10] *Ibidem*, p. 342.

[11] Ele se găsesc în lucrarea citată, pp. 243—248.

4.3 $C\nu x\gamma\gamma x$

4.4 $C\gamma\gamma x\nu x$

Acestea sînt implicaţiile ce derivă din echivalenţele definitorii de mai sus. Dacă o propoziţie x este posibilă (μx), atunci implică dubla imposibilitate a lui x ($\eta\eta x$) şi viceversa (4.2); dacă o propoziţie este necesară, ea implică dubla ei contingenţă şi viceversa (4.4).

Adăugînd la 1.1 — 1.9, axiomele 2.1, 2.2, 3.1 — 3.4 şi aceste definiţii axiomatice (4.1 — 4.4), Moisil demonstrează o serie de teze importante privind necesitatea şi posibilitatea şi raportul lor cu celelalte modalităţi.

Vom aminti numai principalele teze, care sînt:

4.15 $C\gamma\gamma x\eta\eta x$

„Necesitatea implică posibilitatea"; ceea ce este necesar ($\gamma\gamma x$) este posibil ($\eta\eta x$).

4.13 $C\gamma\gamma xx$

„Necesitatea ($\gamma\gamma x$) implică adevărul (x)".

4.14 $Cx\eta\eta x$

„Adevărul (x) implică posibilitatea ($\eta\eta x$)".

4.18 $C\eta x\eta\eta x$

4.19 $C\eta\eta\eta x\eta x$

Aceste două implicaţii arată că tripla imposibilitate echivalează cu imposibilitatea simplă.

La fel tripla contingenţă echivalează cu contingenţa simplă

4.16 $C\gamma\gamma\gamma x\gamma x$

4.17 $C\gamma x\gamma\gamma\gamma x$

După cum a arătat Wajsberg, logica intuiţionistă a lui Heyting, studiată de noi în capitolul precedent, poate fi dedusă şi din axiomele logicii pozitive, la care se adaugă

încă două axiome referitoare la negație[12]. În logica modală generală, rolul negației îl joacă functorul de imposibilitate. Logica intuiționistă poate fi obținută din axiomele 1.1 — 1.9 ale logicii modale generale, la care se adaugă și următoarele două formule:

$$CKCxyCx\eta y\eta x$$

$$C\eta xCxy$$[13]

Prima afirmă că, dacă implicațiile Cxy și $Cx\eta y$ au loc, adică dacă din x se pot deduce atît y cît și imposibilitatea sa, ηy, atunci x este imposibil. A doua este binecunoscuta afirmație că dintr-o propoziție imposibilă se poate deduce orice. Dar ele sînt în sistemul lui Moisil respectiv teoremele 3.28 și 2.23 și, prin urmare, orice teoremă intuiționistă convenabil tălmăcită[14] poate fi dedusă în logica modală generală. Se poate arăta că și invers orice teză a logicii modale generale ce nu conține decît functorii K, A, C și η este și teză a logicii lui Heyting[15]. Prin urmare reiese clar că sistemul intuiționist al lui Heyting este cuprins în logica modală generală.

* 7.6. Logica modală specială

Sistemul logicii modale generale poate fi lărgit, și anume prin introducerea a două noi axiome care să exprime distributivitatea functorilor C și S. Ele sînt

6.1 $CCKxyzACxzCyz$

8.1 $CKSzxSzySzAxy$

---

[12] **M. Wajsberg**, *Untersuchungen über den Aussagenkalkül von A. Heyting*, în „Wiadomosci matematyczne", XLVI, 1938, p. 45.

[13] Acestea sînt chiar axiomele lui Heyting referitoare la negație (4.1 și 4.2 din *6.6), scrise în simbolismul lui Moisil.

[14] Adică în care conjuncția, disjuncția, implicația și negația din sistemul lui Heyting devin respectiv functorii K, A, C și η din sistemul lui Moisil.

[15] **Gr. C. Moisil**, *op. cit.*, p. 254.

Prima exprimă faptul că, dacă din x și y rezultă z, atunci sau din x rezultă z, sau din y rezultă z. A doua spune că dacă „z poate fără x" și „z poate fără y", atunci „z poate fără x sau y". Sistemul ale cărui axiome sînt: 1.1 — 1.9, 2.1 — 2.2, 3.1 — 3.4, 4.1 — 4.4, 6.1 și 8.1 este numit de Moisil *logica modală specială*. Trăsătura sa caracteristică stă în faptul că modalitățile μ (posibilitatea) și ν (necesitatea) se distribuie conjuncției și disjuncției, și următoarele perechi de formule sînt echivalente:

$$\nu Kxy \text{ și } K\nu x\nu y$$

$$\mu Kxy \text{ și } K\mu x\mu y$$

$$\nu Axy \text{ și } A\nu x\nu y$$

$$\mu Axy \text{ și } A\mu x\mu y$$

Deci, cum observă Moisil, în logica modală specială **nu** apare ideea de *compatibilitate*. Într-adevăr, Lewis definise compatibilitatea a două propoziții drept imposibilitatea de a deduce din una dintre propoziții contradictoria celeilalte (vezi *4.7). Se poate arăta că această condiție este echivalentă cu condiția ca să fie posibilă conjuncția celor două propoziții[16]. Dar într-un sistem ca logica specială, aceasta înseamnă exact că fiecare din cele două propoziții este posibilă, și deci compatibilitatea, dintr-o legătură între două propoziții, degenerează în cîte o condiție (posibilitatea) impusă fiecăreia din cele două propoziții.

Să remarcăm un fapt interesant: în logica modală specială, deși nu are loc principiul terțiului exclus ($Ax\eta x$), are loc, sub o formă modalizată, un principiu al quartului exclus

8.19 $$AA\nu x\eta xK\mu x\gamma x,$$

care arată că orice propoziție este sau necesară (νx), sau imposibilă (ηx), sau problematică ($K\mu x\gamma x$)[17]. De asemenea,

[16] Într-adevăr, în logica lui Lewis există teorema

18.3 $$\Diamond(pq) = \sim(p \prec \sim q).$$

(C. I. Lewis & C. H. Langford, *Symbolic Logic*, p. 162); vedeți și această lucrare *4.9.

[17] Moisil numește problematică o propoziție care este în același timp posibilă și contingentă: $K\mu x\gamma x$ *(op. cit.*, p. 260).

se poate demonstra teorema: „dacă τ este o teză a logicii modale speciale, $\nu\tau$ este, de asemenea, o teză". Ea traduce principiul: *Quod est, quando est, oportet esse*, pus și de Łukasiewicz la baza logicii sale trivalente.

Din logica modală specială se pot obține atît logica bivalentă sau clasică, cît și logica trivalentă a lui Łukasiewicz, și anume, iată cum. Dacă, în plus față de axiomele ce am văzut că stau la baza logicii modale speciale, postulăm una, oarecare, din următoarele teze clasice:

9.I $Ax\eta x$

9.II $C\gamma x\eta x$

9.III $C\eta\eta x\gamma\gamma x$

9.IV $C\eta\eta xx$

9.V $Cx\gamma\gamma x$

9.VI $CC\eta\eta x\eta\eta yCxy$

9.VII $CC\gamma\gamma x\gamma\gamma yCxy$

9.VIII $CC\eta x\eta yCxy$

9.XIX $CC\gamma x\gamma yCyx$

9.X $A\gamma\gamma x\eta x$,

sistemul astfel obținut devine identic cu logica bivalentă.

În aceste condiții functorul excepție S își pierde sensul modal, căpătînd înțelesul strict de „x și non y", iar modalitățile, pe care le-am definit cu ajutorul lui, degenerează: necesitatea (ν) și posibilitatea (μ) în simplul adevăr; imposibilitatea (η) și contingența (γ) în simpla falsitate.

Dacă în locul unui astfel de postulat adăugăm logicii modale speciale, drept axiomă, următoarea formulă:

10.3 $CKC\nu x\nu yC\mu x\mu yCxy$,

Moisil arată că se obține logica trivalentă a lui Łukasiewicz.

Postulatul 10.3 poartă numele de *principiul de determinare* și are următorul înțeles: dacă din necesitatea lui x se deduce necesitatea lui y și din posibilitatea lui x se deduce posibilitatea lui y, atunci din x se deduce y[18].

Sîntem însă datori cititorului cu o explicație. Łukasiewicz, după cum am văzut[19], își construise sistemul pornind de la două noțiuni fundamentale: implicația, pe care o notase cu C, și negația, pe care o notase cu N. În logica lui Moisil, pînă acum, nu apar nici unul din acești doi functori căci ceea ce Moisil notează cu C este o altă implicație decît cea definită de Łukasiewicz. Pentru a face deosebirea o vom nota pe aceasta din urmă cu C_L. Negația łukasiewicziană N poate fi definită în logica trivalentă (adică logica modală specială cu axioma 10.3) prin următoarele două axiome:

11.1 $CNxA\eta xKx\gamma x$

11.2 $CA\eta xKx\gamma xNx$

Ele spun că „Nx" înseamnă același lucru cu „x este imposibil sau x este adevărat, dar contingent".

Cît despre implicația Łukasiewicz C_L, ea poate fi definită prin următoarele două axiome:

12.1 $CC_Lxy\,ACxy\,CNy\,Nx$

12.2 $CACxy\,CNy\,Nx\,C_Lxy$

Adică „C_Lxy" înseamnă „Cxy sau $CNyNx$"[20]. Moisil reușește astfel să dezvolte întreaga logică trivalentă pe care am urmărit-o în capitolul 5.

---

[18] **Gr. C. Moisil,** *op. cit.*, p. 272. Moisil consideră axiomele 9.I—9.X de asemenea niște principii de determinare, dar „mai tari" (*op. cit.*, p. 266).

[19] *5.7.

[20] Diferența dintre implicația definită de Łukasiewicz și cea notată de Moisil prin simbolul C mai poate fi pusă în evidență și în modul următor. Pe cînd implicația lui Łukasiewicz era, după cum am văzut (*5.12), astfel definită încît cînd $x \leqslant y$, C_Lxy lua valoarea 1, iar cînd $x > y$, C_Lxy lua valoarea $1 - p + q$, implicația introdusă de Moisil este astfel încît cînd $x \leqslant y$, Cxy ia tot valoarea 1, dar cînd $x > y$, Cxy ia valoarea y. Ea este implicația-reziduație.

Punctul de vedere dezvoltat pînă acum permite punerea în evidenţă a unui fapt deosebit de interesant. Anume, am observat că logica lui Heyting era cuprinsă în logica modală generală. Tezele acesteia din urmă sînt şi teze ale logicii modale speciale[21], iar logica modală specială plus principiul determinării ne furnizează logica trivalentă. Aşadar, tezele logicii intuiţioniste ale lui Heyting sînt valabile în logica trivalentă a lui Łukasiewicz[22], bineînţeles, cu condiţia să nu confundăm implicaţia şi negaţia intuiţionistă (identificate în logica modală generală cu C şi η) cu implicaţia şi negaţia utilizate de Łukasiewicz şi pe care Moisil le-a notat, după cum am văzut, prin C_L şi N. Între ele subzistă relaţiile 11.1, 11.2, 12.1 şi 12.2. Observăm, aşadar, la ce rezultate interesante conduce studiul sistemelor modale construite de Moisil.

* 7.7. Logicile modale simetrice

După cum observă Moisil, o clasă importantă de sisteme sînt cele care admit un functor unar — negaţia, pe care s-o notăm cu N — şi care se bucură de următoarele două proprietăţi:

N satisface legea dublei negaţii

$$NNx = x;$$

de asemenea, are loc regula transpoziţiei, care în schemă poate fi reprezentată astfel:

$$\frac{Cxy}{CNyNx},$$

adică din „x implică y" deducem „Ny implică Nx".

---

[21] Aceasta rezultă din faptul că logica modală specială s-a obţinut adăugînd acestor teze o serie de altele noi (cele deduse din axiomele 6.1 şi 8.1).

[22] Şi se poate arăta că această relaţie are loc şi între logica lui Heyting şi o logică polivalentă L_m oarecare.

Logica bivalentă, logica trivalentă a lui Łukasiewicz satisfac aceste condiții.

Moisil studiază proprietățile comune acestor sisteme într-o logică pe care o numește *logică modală simetrică generală*[23]. Ea se obține adăugînd axiomelor 1.1 — 1.9, 2.1 — 2.2, 3.1 — 3.4 și 4.1 — 4.4, care caracterizau logica modală generală, următoarele trei postulate

16.1 $\dfrac{Cxy}{CNyNx}$

16.2 $CxNNx$

16.3 $CNNxx$

Cele mai interesante consecințe ce decurg din ele sînt legile lui De Morgan

$$NAxy = KNxNy$$

$$NKxy = ANxNy$$

precum și

$$NCtt = Stt$$

$$NStt = Ctt$$

Ultimele două exprimă legătura care există între implicație (C) și excepție (S), astfel încît functorul excepție poate fi construit cu ajutorul implicației și negației prin formula

$$Sxy = NCNyNx$$

Se poate pune întrebarea: ce legătură există între această negație N și cele două modalități, imposibilitatea (η) și contingența (γ), ale logicii modale generale. Considerînd pe N ca exprimînd simpla falsitate, ar fi natural ca imposibilitatea să implice falsitatea

$$C\eta xNx$$

[23] La început, în 1941, el a numit-o logica simetrică generală, ulterior schimbîndu-i denumirea (vedeți lucrarea citată, p. 308).

și falsitatea să implice contingența

$$CNx\gamma x$$

Dar aceste formule nu pot fi deduse ca teoreme în logica modală simetrică generală. Moisil le ia atunci ca axiome, numind *logică modală simetrică normală* logica modală specială care este simetrică (16.1 — 16.3) și satisface aceste axiome[24]. În această logică au loc următoarele echivalențe:

$$N\eta_i x = \gamma_i N x = \eta_i \eta_i x,$$

adică falsitatea imposibilității, contingența falsității și imposibilitatea imposibilității sînt unul și același lucru; la fel falsitatea contingenței, imposibilitatea falsității și contingența contingenței, după cum arată:

$$N\gamma x = \gamma_i N x = \gamma\gamma x$$

De asemenea, are loc principiul dublei imposibilități:

$$N\mu N\mu x = \mu x$$

* 7.8. Considerații generale

Sistemul „logicii modale generale" este un efort logistic de a îmbrățișa în același cadru, pe cît posibil, celelalte sisteme. Noțiunea pur algebrică de *reziduație*, pe care își întemeiază Moisil construcția sa, asigură întregului edificiu simplitate și eleganță. În fond, ca și Łukasiewicz, logicianul român își dă anume functori care prin definiție vor avea anume legături între ei; pe baza definițiilor axiomatice se va naște astfel un calcul. Este aceasta o logică?

Problema este dificil de tranșat și amînăm acest subiect de discuții pentru capitolul „Concluzii finale". Ne vom rezuma aici a sublinia cîteva puncte privind sistemul lui Moisil.

[24] **Gr. C. Moisil**, *op. cit.*, p. 315.

Am văzut că el ajunge să stabilească în logica modală specială teorema: dacă τ este o teză, atunci și $\nu\tau$ este teză. Cu alte cuvinte adevărul unei propoziții τ atrage după sine necesitatea ei. Ceea ce este însă admisibil numai în interpretarea pe care i-am dat-o vorbind despre principiul similar enunțat și pus de Łukasiewicz printre axiomele sistemului său (*5.14).

Partea cea mai delicată a logicii lui Moisil ne apare a fi definiția necesității ca fiind dubla contingență:

$$\nu x = \gamma\gamma x$$

Moisil însuși a remarcat că, din punct de vedere logic, aceasta prezintă dificultăți. Iată în acest sens ce scrie el: „Principiul dublei contingențe — contingența contingenței echivalează cu necesitatea — ne pare greu de susținut“[25] și de aceea „acest principiu merită o analiză mai aprofundată“. Unde ne conduce o asemenea analiză? La concluzia că principiul $\nu x = \gamma\gamma x$, „cu tot caracterul său straniu“, este consecința inevitabilă a unor principii cu totul naturale. El apare, de altfel, așa cum arată Moisil, atît în logica cu trei valori a lui Łukasiewicz, cît și în cea cu patru și cinci valori de adevăr.

[25] *Ibidem*, p. 101.

8
Logica probabilităţilor

* 8.1. Noţiunea de probabilitate

Noţiunea de probabilitate este utilizată frecvent în limbajul zilnic. Un eveniment natural nu poate fi prevăzut cu o certitudine absolută pornind numai de la un număr finit de date, cîte sînt accesibile omului la un moment dat. Astfel spunem, de exemplu, că starea viitoare a vremii este cunoscută cu o probabilitate de 40% sau mai mult.

Dar nu numai cele cu privire la viitor, ci şi cele referitoare la trecut pot fi supuse unei aprecieri probabilistice. Istoricul compară evenimentele ce au avut loc după informaţiile de care dispune afirmînd: „este foarte probabil ca Nero să fi ordonat arderea Romei şi este foarte puţin probabil ca Bacon să fi fost autorul pieselor lui Shakespeare".

Trebuie să ne păzim însă a confunda noţiunea de probabilitate cu cea de posibilitate, cu toată asemănarea mare dintre ele.

Ştiinţa modernă, dar mai ales cea contemporană, şi-a însuşit această noţiune şi nu putem concepe teoriile ştiinţifice actuale fără a face apel la ea. Au trebuit însă mulţi ani de studii şi reflecţii care să precizeze şi să pună în lumină conţinutul noţiunii de probabilitate. În cursul timpului

s-au cristalizat cu privire la această noțiune mai multe concepții importante. Ne vom opri îndeosebi la cele care privesc logica formală[1].

Pentru prima dată o delimitare strictă a probabilității și o încercare de definire a ei s-a făcut pe la mijlocul secolului al XVII-lea, în cadrul așa-numitei teorii matematice a jocurilor de noroc. Un pas important înainte a fost făcut de J. Bernoulli, care a arătat că într-un număr mare de experiențe frecvența unui eveniment diferă puțin de probabilitatea matematică a evenimentului. Adică cu cît numărul cazurilor analizate este mai mare, cu atît elementul întîmplător este eliminat din considerații (Legea numerelor mari).

Definiția, pe care o numim astăzi *clasică*, a probabilității a fost dată de Laplace (1785). Pentru a o formula, să considerăm un exemplu. Fie un zar perfect (absolut omogen și simetric). Cînd îl aruncăm, oricare din fețele sale poate apărea cu aceeași probabilitate. Cum sînt în total șase fețe, probabilitatea de apariție a fiecăreia este $\frac{1}{6}$. Laplace definește probabilitatea producerii unui eveniment drept raportul

$$\frac{n}{m},$$

unde n este numărul cazurilor favorabile, iar m numărul cazurilor posibile. După această definiție, probabilitatea ca la aruncarea zarului nostru să iasă un număr par (2, 4, 6) va fi $\frac{3}{6}$, adică $\frac{1}{2}$.

La o analiză mai serioasă însă, această definiție a fost găsită insuficient fundamentată din punct de vedere logic și experimental. Fără să intrăm în detalii, este suficient să spunem că o serie de cercetători au abandonat-o în

[1] Cititorul poate găsi un material informativ mai bogat în articolul lui **G. Ciucu**, *Teoria probabilităților și modelarea probabilistă*, publicat în culegerea *Materialismul dialectic și științele naturii*, vol. X, Editura politică, București, 1965. De asemenea, o analiză aprofundată a noțiunilor legate de teoria probabilităților se găsește în lucrarea **acad. O. Onicescu**, *Numere și sisteme aleatoare*, Editura Academiei, București, 1962.

favoarea unei definiții bazate pe noțiunea de *frecvență*. Pornind de la această noțiune, s-au dezvoltat două școli. Una, bazată pe lucrarea *The Logic of chance* a lui J. Venn, explică probabilitatea prin limita unei frecvențe relative într-un șir numărabil de evenimente (vom vedea imediat ce înseamnă aceasta). Ea a fost dezvoltată de R. von Mises și H. Reichenbach. Îmbunătățiri importante i-au fost aduse ulterior de A. Wald. Concepția acestora și mai ales a lui H. Reichenbach ne va interesa îndeosebi în cele ce urmează. O a doua școală, legată în special de statistica modernă, a grupat statisticieni de frunte ca R. A. Fisher, J. Neyman, E. S. Pearson și alții. În concepția lor, probabilitatea este considerată ca un termen nedefinit într-un sistem axiomatic. O asemenea poziție fusese deja adoptată de A. N. Kolmogorov în 1933. Poziția axiomatică a fost dezvoltată și precizată, ținînd seama de multiplele fațete ale experienței, de mulți alții, printre care menționăm pe B. de Finetti, A. Rényi și O. Onicescu.

Dar să ne întoarcem pentru un moment la definiția probabilității ca frecvență (limită). Vom urmări concepția lui von Mises, fundamentală în această privință[2].

Pentru a înțelege mai întîi sensul noțiunilor de frecvență relativă și frecvență-limită, să considerăm o mulțime finită S formată din k entități distincte (al căror conținut va fi precizat ulterior) $a_1, a_2, \ldots, a_k$, pe care Mises le numește etichete *(labels)*, și un șir de elemente notat pe scurt $\{x_j\}$ format doar din etichetele $a_1, a_2 \ldots a_k$, toate sau numai o parte, fiecare apărînd o dată sau de mai multe ori și într-o ordine fără legătură cu indicii lor. Fie a_i una dintre etichete, fixată. Printre primele n elemente ale șirului $\{x_j\}$ apare de n_i ori a_i. Numărul n_i depinde de n, de a_i și de șirul $\{x_j\}$. Raportul $\frac{n_i}{n}$ se numește *frecvență* sau *frecvență relativă* a lui a_i printre primele n elemente din $\{x_j\}$.

---

[2] În expunere am utilizat lucrarea sa *Mathematical Theory of Probability and Statistics* (edited and complemented by H. Geiringer), New York and London, 1964.

Pentru a înțelege rostul acestor considerații abstracte, să luăm un exemplu concret, și anume tot un zar, care de data aceasta nu mai trebuie să fie perfect. Fețele sale, în număr de șase, le notăm astfel: fața „1" prin a_1, fața „2" prin a_2 ș.a.m.d. Aruncînd zarul de mai multe ori, vom nota cu x_1 fața ieșită la prima aruncare, cu x_2 fața ieșită la a doua aruncare etc. Să considerăm apariția feței „6" în primele 100 de asemenea aruncări, adică apariția etichetei a_6 printre primii 100 de termeni ai șirului $\{x_j\}$. Am notat cu n_6 numărul acestor apariții. Deci frecvența (relativă) a lui a_6 printre primii 100 de termeni ai șirului $\{x_j\}$ este $\frac{n_6}{100}$.

Conceptul de frecvență trebuie eliberat însă de dependența sa față de numărul termenilor din șir considerați (n). Mises face atunci următoarea ipoteză fundamentală: *Șirul poate fi extins în mod indefinit și frecvența* $\frac{n_i}{n}$ *se apropie de o limită pe măsură ce* n *tinde către infinit.* Vom nota această limită cu p_i, care se numește *frecvență-limită.*

Pentru von Mises, *ori de cîte ori este utilizat termenul de probabilitate, el se referă la o (limită de) frecvență, și această frecvență trebuie să fie aproximativ verificabilă, cel puțin conceptual*[3]. Dacă spunem că probabilitatea de apariție a feței „6" la aruncarea unui zar este $\frac{1}{5}$, aceasta implică faptul că, la aruncarea de 10 000 de ori a zarului, „6" va apărea de aproximativ 2 000 de ori.

Să observăm că în virtutea unei asemenea concepții orice aserțiune probabilistă se referă nu la evenimente luate în mod izolat (de pildă o singură aruncare a unui zar), ci la clase întregi de evenimente similare. O asemenea interpretare acordată probabilității se mai numește și *interpretare statistică.* După cum se poate vedea, în acest fel conținutul noțiunii de probabilitate apare extras direct

[3] **R. von Mises,** *op. cit.*, p. 45.

din experienţă, ceea ce a făcut pe mulţi să dea concepţiei calificativul de empirică[4].

Concepţia filozofului şi logicianului german H. Reichenbach, care ne va interesa în mod deosebit în cele ce urmează, pleacă tot de la interpretarea probabilităţii ca frecvenţă[5]. După părerea sa însă termenul de probabilitate poate fi folosit în două accepţii: una se referă la şirurile de evenimente sau de obiecte fizice (de exemplu, şirul de aruncări ale unui zar); în această accepţie cuvîntul trebuie să fie interpretat ca referitor la o frecvenţă relativă. În cealaltă accepţie termenul „probabilitate" este aplicat evenimentelor singulare sau altor obiecte fizice singulare[6].

Deosebit de interesantă la Reichenbach este, mai ales din punctul nostru de vedere, următoarea observaţie. Cînd interpretez probabilitatea ca frecvenţă, ea apare ca o proprietate a unui şir de evenimente. Putem considera însă în locul acestor evenimente propoziţiile care afirmă că au avut sau vor avea loc. De pildă, în locul evenimentului care constă în apariţia feţei „6" la aruncarea unui zar, să considerăm afirmaţia «va apărea faţa „6"», şi astfel să facem din probabilitate un mod de evaluare *(rating)* a propoziţiilor. Interpretarea aceasta a probabilităţii este numită de Reichenbach *interpretare logică*.

De fapt primul care a avut ideea unei asemenea interpretări a fost G. Boole. Iată ce scria el: „Există o altă formă în baza căreia pot fi examinate toate problemele teoriei probabilităţilor: această formă constă din a substitui

---

[4] Nu putem intra în discuţia acestei concepţii şi a laturilor sale controversate. Menţionăm doar că ea implică o anume limitare în domeniul aplicabilităţii noţiunii de probabilitate.

[5] Ea a fost expusă de H. Reichenbach mai întîi în lucrarea *Wahrscheinlichkeitslehre*, Leyden, 1935, iar apoi revizuită şi completată, ţinînd seama de criticile ce i s-au făcut, în *The Theory of Probability*, Berkeley — Los Angeles, 1949 (citatele le vom da după aceasta din urmă). Este de remarcat că, în ciuda criticilor făcute primei lucrări, autorul menţine punctele importante ale concepţiei sale despre probabilitate.

[6] H. Reichenbach, *op. cit.*, p. 388. Această din urmă accepţie o vom discuta în *8.4.

evenimentelor propozițiile care afirmă că aceste evenimente au avut sau vor avea loc"[7].

Interpretarea probabilității pe planul logic a mai fost întreprinsă și de alți cercetători, printre care trebuie menționați în primul rînd J. M. Keynes și H. Jeffreys. Ei o consideră ca pe o relație logică obiectivă între două propoziții. Asupra punctului lor de vedere vom reveni în *8.4.

De această problemă s-a ocupat, de asemenea, logicianul și filozoful R. Carnap. El găsește pe lîngă interpretarea probabilității ca frecvență și o altă interpretare logică, și anume ca „grad de confirmare" *(degree of confirmation)* al unei propoziții de către o altă propoziție. Acest concept este, după Carnap, semantic, adică bazat pe înțelesul lui, și logic, adică independent de fapte[8].

Dar să revenim la concepția lui Reichenbach.

Pentru a degaja noțiunea de probabilitate, el consideră de mare ajutor metoda simbolică. Prin extensiune, metodele logicii simbolice folosite de noi pînă în prezent pot include o caracterizare a judecăților de probabilitate. Să vedem cum.

Mai întîi să observăm că o judecată de probabilitate are forma unei implicații. Numai că spre deosebire de implicația logică care afirmă: dacă propoziția a este adevărată, atunci și propoziția b este adevărată, implicația de probabilitate afirmă: dacă propoziția a este adevărată, atunci propoziția b are probabilitatea p[9]. În cazul zarului, de pildă, am afirmat: «dacă arunc zarul, atunci apariția feței „6" are probabilitatea p». Pentru acest motiv Reichenbach notează implicația de probabilitate prin simbolul implicației logice „$\supset$" tăiat cu o linie orizontală, specificînd dedesubt și gradul de probabilitate p : „$\underset{p}{\rightarrow}$".

Implicația de probabilitate are loc, așadar, între cele două propoziții a și b. Amîndouă afirmă producerea a două

---

[7] **G. Boole**, *An Investigation of the Laws of Tought on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, London, 1854, p. 247.

[8] **R. Carnap**, *Logical Foundations of Probability*, Chicago, 1950, cap. II și în special § 9 și § 10.

[9] Ne vom ocupa aici doar de interpretarea logică a probabilității, adică aplicată nu evenimentelor înseși, ci propozițiilor despre evenimente.

evenimente. Primul este aruncarea zarului. Dar nu este vorba de o anumită aruncare individualizată, ci de una oarecare. Prin urmare ea afirmă că un eveniment x aparține clasei aruncărilor A : $x \in A$. Este aici un grad de nedeterminare asemănător celui menționat cînd am vorbit de funcția propozițională. De fapt această propoziție poate fi scrisă și sub forma unei funcții propoziționale: fx. În mod analog afirmația producerii celui de-al doilea eveniment — apariția feței „6" —, prezentînd același grad de nedeterminare, poate fi simbolizată prin $y \in B$ sau gy. Legătura dintre ele constituie judecata de probabilitate: «dacă arunc zarul, atunci apariția feței „6" are probabilitatea p» și va fi notată, utilizînd simbolul introdus de Reichenbach, prin

$$x \in A \underset{p}{\rightarrow} y \in B$$

sau

$$fx \underset{p}{\rightarrow} gy$$

Dar am văzut, studiind interpretarea prin frecvență a probabilității, că o asemenea afirmație de probabilitate conține de fapt un șir întreg de evenimente. Cu alte cuvinte, evenimentele x se ordonează într-un șir $x_1, x_2 \ldots x_i \ldots$; la fel și evenimentele y în șirul $y_1, y_2 \ldots, y_i \ldots$, fiecărui x_i corespunzîndu-i un y_i bine determinat. Judecata de probabilitate afirmă de fapt relația:

$$x_i \in A \underset{p}{\rightarrow} y_i \in B$$

pentru toate perechile de evenimente corespunzătoare din cele două șiruri, ceea ce Reichenbach notează pe scurt prin:

$$(i)(x_i \in A \underset{p}{\rightarrow} y_i \in B)$$

Prin urmare judecata de probabilitate este o implicație generală între afirmații cu privire la apartenența la niște clase a elementelor anumitor șiruri date[10].

[10] **H. Reichenbach,** *op. cit.*, p. 46.

Pentru motive de economie vom scrie același lucru prin

$$P(A, B) = p$$

sau

$$P(fx_i, gy_i) = p$$

Expresia $P(A, B)$ se va citi „probabilitatea de la A la B" și reprezintă o relație: *relația de probabilitate*. Este ceea ce în literatura de specialitate se numește *probabilitatea relativă* sau *condiționată* a lui B față de A. Se mai întrebuințează, de asemenea, și *probabilitatea absolută*, însă numai ca un mod abreviat de a vorbi, cînd clasa A (sau clasa de referință) este subînțeleasă, și anume cînd toate propozițiile $x_i \in A$ sau fx_i sînt adevărate. Cum o propoziție adevărată poate fi scrisă sub forma $a \vee \bar{a}$ („a sau non-a", principiul terțiului exlus), probabilitatea absolută poate fi definită în felul următor:

$$P(gy_i) = P(fx_i \vee \overline{fx_i}, gy_i) \qquad Df.$$

Probabilitățile se bucură de cîteva proprietăți importante. Pentru a le degaja nu este necesar să presupunem una, anume, dintre diversele interpretări ale acestei noțiuni. Este suficient să presupunem adevărate cîteva proprietăți fundamentale, adică valabile din punctul de vedere al oricărei asemenea interpretări. Se constituie astfel un sistem axiomatic. S-au construit diverse asemenea sisteme axiomatice. Primul, după cum am mai spus, este datorat lui A. N. Kolmogorov[11]. La baza lui au stat o serie de alte cercetări, în principal cele ale lui Gibbs. I-au urmat o serie de modificări și completări dintre care menționăm pe cele ale lui Finetti, Rényi, Onicescu.

În ultimii ani, prof. O. Onicescu a elaborat în această privință un nou punct de vedere asupra a ceea ce trebuie să înțelegem, din punct de vedere matematic, printr-un calcul probabilist. Astfel el îmbracă într-o privire unitară gama foarte variată a necesităților disciplinelor ce se servesc de acest instrument. Iată pe scurt în ce constă acesta[12].

[11] **A. N. Kolmogorov**, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin, 1933.

[12] Datorăm prof. Onicescu scurta expunere ce urmează asupra cercetărilor sale.

Pentru a face teoria probabilităţilor, trebuie mai întîi să precizăm, în măsura posibilului, care este structura algebrică a evenimentelor (sau propoziţiilor despre acestea) susceptibile de probabilizare într-un sistem de astfel de propoziţii, în care vreau să definesc o probabilitate. Precizarea trebuie să fie suficient de întinsă, pentru ca, pe măsura unui proces la care evenimentele sînt supuse, să putem extinde sistemul de evenimente la o structură algebrică anumită (în care evenimentele satisfac legile de comutativitate, asociativitate, distributivitate etc., structură care în cazul acesta se numeşte *latice relativ complementată*)[13].

Acestor evenimente le putem atribui eventual măsuri finit aditive, care reprezintă o estimaţie teoretică sau practică a evenimentelor respective în cadrul unui fenomen determinat. Pentru matematician ponderile evenimentelor relativizate la un eveniment fundamental pot căpăta semnificaţia de probabilitate. Această probabilitate, astfel definită, are proprietăţile clasice ale probabilităţii pentru sistemul de evenimente relativizat la evenimentul fundamental.

Un proces aleator este constituit dintr-o succesiune de evenimente ale laticii relativizate la o succesiune de evenimente fundamentale care se amplifică pe măsura desfăşurării procesului. Probabilităţile respective ale procesului urmează şi ele procesul de schimbare corespunzător.

Teoria aceasta a fost obligată să-şi creeze un instrument cantitativ care să reprezinte mărimile asociate diverselor evenimente.

În teoria clasică, mărimile sînt reprezentate prin funcţii măsurabile definite pentru punctele spaţiului evenimentelor elementare şi poartă numele de *variabile aleatoare*. Ele sînt susceptibile de *valori medii*, de *abateri*, de *abateri medii pătratice*. Variabilele aleatoare pierd orice sens în cadrul teoriei lui Onicescu şi sînt înlocuite cu *funcţii sumă* care sînt, ca şi probabilităţile, valori aditive de evenimente care se anulează odată cu probabilitatea acestor evenimente.

Reichenbach îşi fundamentează sistemul său de calcul al probabilităţilor pe cîteva axiome destul de simple, dar din care se pot deduce, pe bază de reguli simbolice, toate proprietăţile probabilităţii ca frecvenţă. Ceea ce îi conferă un plus de vigoare şi concizie. Noi nu putem intra aici în dezvoltarea matematică a acestui calcul, dar vom utiliza anumite relaţii între probabilităţi ce se pot deduce în interiorul său şi de care vom avea nevoie în expunerea logicii probabilităţilor.

---

[13] **O. Onicescu,** *Principiile teoriei probabilităţilor*, Editura Academiei, Bucureşti, 1969.

Prin logica probabilităților Reichenbach înțelege transpunerea legilor calculului probabilităților în limbaj logic. Ca urmare se obține o logică polivalentă cu o infinitate de valori, probabilitățile, adică toate numerele cuprinse între 0 și 1.

* 8.2. Constituirea logicii probabilităților

După cum am văzut, Reichenbach aderă, în ceea ce privește noțiunea de probabilitate, la interpretarea statistică a lui von Mises, după care probabilitatea este o proprietate a unui șir de evenimente, și anume o frecvență relativă. Trecînd de la evenimente la propoziții despre evenimente, probabilitatea devine o proprietate a unui șir de asemenea propoziții. Din acest motiv este recomandabil să construim din punct de vedere tehnic logica probabilităților plecînd nu de la propoziții luate separat, ci de la șiruri de propoziții considerate ca niște entități[14]. Fie, așadar, două șiruri de propoziții pe care, urmînd notația lui Reichenbach, le vom scrie astfel:

$hz_1,\ hz_2,\ \ldots,\ hz_i,\ldots$ pe scurt (hz_i)

$fx_1, fx_2,\ \ldots\ , fx_i,\ldots$ pe scurt (fx_i),

adică sub forma a două funcții propoziționale h și f, ale căror argumente z și x au drept valori, pe rînd, elementele șirurilor $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_i\ldots$ și respectiv $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i\ \ldots$

Atunci probabilitatea relativă a șirului (fx_i) față de șirul (hz_i) va fi notată, utilizînd simbolul P: $P((hz_i),\ (fx_i))$ sau pe scurt $P(hz_i,\ fx_i)$[15]. Ea va reprezenta, după definiția lui von Mises adaptată cazului de față, frecvența propozițiilor fx_i adevărate dintr-un subșir prelevat din șirul (fx_i), după următoarea regulă: el este format din

[14] **H. Reichenbach**, *op. cit.*, p. 395.

[15] Vedeți *8.1. Reichenbach atrage atenția asupra faptului că ar trebui să scriem $P(„hz_i“,\ „fx_i“)$, punînd în evidență faptul că acum ne referim la propozițiile despre evenimente și nu la evenimentele înseși. Ceea ce nu schimbă însă cu nimic modul de tratare al problemei.

acei termeni fx_i, pentru care termeni corespunzători (cu același indice) hz_i din șirul (hz_i) sînt propoziții adevărate.

Pentru a înțelege mai bine această definiție, să considerăm un caz particular, și anume cel în care toate șirurile de propoziții sînt formate din cîte n termeni și deci sînt finite. Cum se calculează în acest caz probabilitatea $P(hz_i, fx_i)$? Eliminăm mai întîi din șirul (fx_i) termenii corespunzători propozițiilor false din șirul (hz_i)[16]. Obținem un nou șir — o parte a șirului (fx_i) — care poate avea mai puțini sau cel mult n termeni. Probabilitatea $P(hz_i, fx_i)$ va fi atunci exact frecvența propozițiilor adevărate în acest nou șir, adică raportul dintre numărul propozițiilor adevărate și numărul tuturor propozițiilor (adevărate și false) din el.

Vom numi *probabilitate (absolută)* a șirului (fx_i) frecvența propozițiilor adevărate din el. Se poate imediat observa că aceasta echivalează cu presupunerea că în șirul (hz_i) toate propozițiile sînt adevărate, au forma $a \vee \bar{a}$[17]. Prin urmare probabilitatea (absolută) a șirului (fx_i) poate fi definită cu ajutorul probabilității sale relative astfel:

$$P(fx_i) = P\,(a \vee \bar{a}, fx_i) \qquad Df.$$

Cînd șirurile de care ne ocupăm au fiecare cîte n termeni, probabilitatea oricăruia dintre ele poate lua doar $n + 1$ valori, și anume:

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \ldots\ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n};$$

prin urmare logica pe care vrem s-o construim va fi în acest caz $(n + 1)$-valentă.

Între cazul finit pe care îl tratăm acum și cel infinit există cîteva deosebiri esențiale pe care este bine să le punem în evidență. Existența limitei frecvenței propo-

[16] În logica de care ne ocupăm acum se presupune că propozițiile pot lua doar două valori de adevăr: adevărul și falsul.

[17] În notațiile lui Reichenbach prin „a" simbolizăm o propoziție oarecare, iar prin „$\bar{a}$" negația sa (non-a). Așa încît „$a \vee \bar{a}$" este principiul terțiului exclus „a sau non-a" și deci o propoziție adevărată.

zițiilor adevărate din orice șir este în acest caz în mod banal asigurată; am văzut și ce valori poate lua. Ordinea elementelor oricăruia din aceste șiruri nu influențează cu nimic această limită. Limita este 1 atunci și numai atunci cînd toate propozițiile sînt adevărate; de exemplu, în cazul șirului (fx_i), cînd funcția propozițională respectivă are loc pentru toți x_i, sau cum am mai spus noi, este „universal validă"[18]. Ea este 0 cînd toate propozițiile sînt false. Prin urmare, în cazul finit nu există nici o deosebire între implicația generală și o implicație de probabilitate de gradul 1.

Cînd $n = 1$, deci șirurile de propoziții conțin doar cîte un singur termen, logica obținută va avea doar două valori — cele două frecvențe posibile în acest caz — 0 și 1. Astfel că adevărul și falsul pot fi privite drept cazurile-limită de probabilitate cînd șirul se reduce la un singur element.

Acum să revenim la cazul infinit. Bazîndu-se pe operațiile logice între propoziții (disjuncția, conjuncția etc.), Reichenbach definește analogele lor pentru șirurile de propoziții. Fie (fx_i) și (gy_i) două asemenea șiruri. Vom nota prin: $(fx_i) \vee (gy_i)$ disjuncția lor logică, prin $(fx_i) \,.\, (gy_i)$ conjuncția lor logică, prin $(fx_i) \supset (gy_i)$ implicația lor, prin $(fx_i) \equiv (gy_i)$ echivalența lor. Negația, Reichenbach o notează printr-o bară pusă deasupra șirului respectiv: $\overline{(fx_i)}$ pentru negația lui (fx_i). Definițiile acestor operații sînt următoarele:

$$(fx_i) \vee (gy_i) = (fx_i \vee gy_i) \qquad Df.$$

$$(fx_i) \,.\, (gy_i) = (fx_i \,.\, gx_i) \qquad Df.$$

$$(fx_i) \supset (gy_i) = (fx_i \supset gy_i) \qquad Df.$$

$$(fx_i) \equiv (gy_i) = (fx_i \equiv gy_i) \qquad Df.$$

Cu alte cuvinte, operarea logică a două șiruri reprezintă șirul obținut prin operarea logică a perechilor de elemente

[18] Vedeți *3.14.

corespunzătoare. Același mod de definiție se aplică și în cazul negației

$$\overline{(fx_i)} = (\overline{fx_i}) \qquad Df.$$

În acest fel, pe baza definițiilor date, putem considera probabilitatea unei disjuncții, conjuncții etc. de șiruri de propoziții. Spre exemplu $P((fx_i) \vee (gy_i))$ va fi, conform definiției disjuncției de șiruri, egală cu $P(fx_i \vee gy_i)$. Reichenbach procedează și invers. Anume, pornind de la probabilitatea relativă a două șiruri (fx_i) și (gy_i),

$$P(fx_i, gy_i),$$

a cărei semnificație am urmărit-o la începutul acestui paragraf, el definește o nouă operație între șiruri, pe care o notează, din motive pe care le vom înțelege imediat, printr-o virgulă „ , ". Și anume (fx_i), (gy_i) reprezintă un nou șir de propoziții astfel definit încît

$$P((fx_i), (gy_i)) = P(fx_i, gy_i)$$

Înțelesul operației „," este, după Reichenbach, acela al unei selecții operate de șirul (fx_i) în șirul (gy_i)[19].

Rolul acestei noi operații, specifice logicii probabilităților, este, după cum vom vedea, esențial. În calculul probabilităților determinarea probabilității unui eveniment compus din două (sau mai multe) evenimente necesită pe lîngă cunoașterea probabilității acestora, cunoașterea a cel puțin încă unei probabilități referitoare la ele. Vom transpune acum, punct cu punct, aceste cunoștințe din calculul probabilităților în logica probabilităților[20]. Pentru aceasta să considerăm două șiruri de propoziții (fx_i) și (gy_i) ale căror probabilități (absolute) le vom presupune cunoscute notîndu-le respectiv cu p și q.

[19] Ceea ce poate fi ușor de înțeles în lumina celor spuse de noi la începutul acestui paragraf, cînd am vorbit de calculul probabilității relative.

[20] Pentru formulele de calculul probabilităților și demonstrarea lor, vedeți spre exemplu, **M. Iosifescu, Gh. Mihoc** și **R. Theodorescu**, *Teoria probabilităților și statistica matematică*, Ed. tehnică, București, 1966, pp. 10—17.

Formăm, spre exemplu, șirul $(fx_i) \vee (gy_i)$ care este prin definiție $(fx_i \vee gy_i)$. Probabilitatea $P(fx_i \vee gy_i)$ este dată, în calculul probabilităților, de formula:

$$P(fx_i \vee gy_i) = P(fx_i) + P(gy_i) - P(fx_i) \cdot P(fx_i , gy_i)$$

sau, ținînd seama de notațiile făcute,

$$P(fx_i \vee gy_i) = p + q - p \cdot P(fx_i , gy_i) \qquad (1)$$

Prin urmare, calculul acestei probabilități necesită cunoașterea lui $P(fx_i , gy_i)$, pe care s-o notăm cu u. În funcție de p, q și u pot fi calculate și probabilitățile celorlalte șiruri rezultate din operarea logică a șirurilor (fx_i) și (gy_i). Și anume, pentru ele avem formulele:

$$P(fx_i \cdot gy_i) = pu \qquad (2)$$

$$P(fx_i \supset gy_i) = 1 - p + pu \qquad (3)$$

$$P(fx_i \equiv gy_i) = 1 - p - u + 2pu \qquad (4)$$

$$P(gy_i , fx_i) = \frac{pu}{q} \qquad (5)$$

Probabilitatea negației unui șir de propoziții este dată de

$$P(\overline{fx_i}) = 1 - p \qquad (6)$$

Observăm că, așa cum în calculul propozițional operațiile logice erau funcții de adevărul componentelor lor, tot așa în logica probabilităților, probabilitățile șirurilor de propoziții rezultate din compunerea altor șiruri sînt funcții de probabilitățile acestora din urmă. Deosebirea stă în faptul că aceste funcții depind și de o a treia mărime u. Ea poate fi privită ca o măsură a *gradului de cuplare (degree of coupling)* între cele două șiruri. Însă cele trei argumente ale funcției de adevăr nu mai pot lua valori în mod independent unul de altul. Între ele subzistă anumite relații provenite din semnificația pe care le-am acordat-o: aceea de a reprezenta anumite probabilități.

Astfel, din relația (5) de mai sus rezultă că $\frac{pu}{q}$ trebuie să reprezinte o probabilitate, deci să fie mai mică decît sau egală cu 1. De unde prima condiție:

$$u \leqslant \frac{q}{p} \tag{7}$$

Din faptul că $p + q - pu$ este tot o probabilitate — precum o arată (1) — rezultă că trebuie să fie și ea tot mai mică decît sau egală cu 1, sau

$$\frac{p + q - 1}{p} \leqslant u \tag{8}$$

Definiția probabilității $P(fx_i, gy_i)$ ne arată că în cazul cînd cele două șiruri coincid valoarea sa trebuie să fie 1. Deci

$$P(fx_i, fx_i) = 1 \tag{9}$$

În total, așadar, am găsit trei condiții. Cînd sînt îndeplinite, cunoașterea valorilor p, q și u ne dau posibilitatea determinării și a celorlalte probabilități corespunzătoare operațiilor logice cu cele două șiruri de propoziții. Să urmărim acest lucru în cazul particular, cînd intervin doar două probabilități: 1 și 0. Rezultatele obținute le vom trece în tabele

$p \mid P(\overline{fx_i}) = 1 - p$

1	0
0	1

p	q	u	$P(fx_i \vee gy_i) = p + q - pu$	$P(fx_i \cdot gy_i) = pu$	$P(fx_i \supset gy_i) = 1 - p + pu$	$P(fx_i \equiv gy_i) = 1 - p - u + 2pu$	$P(gy_i, fx_i) = \frac{pu}{q}$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	?
0	1	?	1	0	1	0	0
0	0	?	0	0	1	1	?

Ce observăm? Cînd spre exemplu p și q sînt 1 (primul rînd din tabelul de mai sus), u va trebui, conform condițiilor (8) sau (9), să ia, de asemenea, valoarea 1. Deci își pierde caracterul său independent și toate probabilitățile celorlalte operații logice devin în acest caz perfect determinate doar de valorile lui p și q.

Să explicăm semnificația semnelor de întrebare ce apar în tabel. De pildă cele din coloana a treia. Ele indică faptul că în aceste cazuri (cînd $p = 0$) drept u poate fi luat orice număr aflat între 0 și 1. Aceasta nu va influența cu nimic asupra valorilor probabilităților celorlalte operații. Spre exemplu, disjuncția va avea în acest caz probabilitatea

$$P(fx_i \vee gy_i) = 0 + q - 0 \cdot u = q,$$

care nu depinde decît de q.

Aceste nedeterminări marcate prin semnele de întrebare apar numai pentru probabilitățile $P(fx_i , gy_i)$ și $P(gy_i , fx_i)$ ale operației de selecție. Celelalte operații logice pe care le-am întîlnit și în calculul propozițional sînt perfect determinate doar de valorile lui p și q și au aceleași matrice ca și în calculul propozițional bivalent[21]. Prin urmare am regăsit logica bivalentă ca un caz-limită a logicii probabilităților.

* 8.3. Logica modalităților

După cum am observat, cînd p și q iau doar valorile 1 și 0, se obține un caz degenerat al logicii probabilităților (cazul în care toate operațiile logice sînt funcții doar de două argumente; matricele lor sînt identice cu cele din logica bivalentă). După părerea lui Reichenbach, această situație i-a împiedicat pe logicienii care construiseră logici polivalente să ajungă la o asemenea generalizare[22].

[21] Vedeți *3.3.

[22] În logica polivalentă a lui Łukasiewicz, de pildă (cap. 5), operațiile logice erau funcții tot de două argumente, nu de trei, ca în logica probabilităților.

Cînd trecem însă de la logica cu două valori de adevăr la cea cu trei ş.a.m.d., apar cazuri în care valorile operaţiilor logice nu mai sînt determinate doar de valorile p şi q. În aceste cazuri u apare ca un parametru independent. Aceasta face neinteresantă construirea unor astfel de logici avînd un număr finit de valori de adevăr. Singura plină de interes rămîne logica probabilităţilor avînd o scală continuă de valori. Şi totuşi, vom vedea, considerarea modalităţilor într-o asemenea logică ne conduce la un sistem ale cărui matrice au aceeaşi structură cu a logicii ce se obţine în cazul a trei valori de adevăr ($n = 2$). Cu singura precizare că aceste valori de adevăr nu mai pot fi interpretate ca probabilităţi în sensul de frecvenţe. Dar să vedem despre ce este vorba.

Vom defini modalităţile *necesar* (*Nc*), *posibil* (*Ps*) şi *imposibil* (*Im*) ca proprietăţi ale şirurilor de propoziţii. Şi anume, vom citi expresia $M(fx_i)$: „modalitatea şirului (fx_i)". Atunci definiţiile de care am vorbit sînt:

$$[M(fx_i) = Nc] = (x_i)fx_i \qquad Df.$$

$$[M(fx_i) = Ps] = (\exists x_i)fx_i \cdot (\exists x_i)\overline{fx_i} \qquad Df.$$

$$[M(fx_i) = Im] = (x_i)\overline{fx_i} \qquad Df.$$

Prima ne spune că modalitatea şirului (fx_i) este *necesar*, dacă pentru orice x_i, fx_i este adevărată, cu alte cuvinte dacă toate propoziţiile din şir sînt adevărate.

Modalitatea sa este *posibil* dacă în el apar atît propoziţii adevărate, cît şi false[23].

În sfîrşit, modalitatea sa este *imposibil* dacă toate propoziţiile din şir sînt false.

Cînd şirurile pe care le considerăm sînt finite, necesitatea echivalează cu probabilitatea 1, imposibilitatea cu probabilitatea 0, iar posibilitatea cu una oarecare dintre probabilităţile intermediare acestor valori. Cînd considerăm însă şiruri infinite, frecvenţa-limită a unui astfel de şir (deci probabilitatea sa) poate să fie 1 fără ca toţi termenii să fie propoziţii adevărate. Necesitatea unui astfel de şir

[23] Aşa cum observă şi Reichenbach, posibilitatea definită astfel înseamnă *doar* posibilitate, adică că ea exclude necesitatea (*op. cit.*, p. 401).

impune o condiție mai restrictivă decît aceea ca probabilitatea sa să fie 1. Considerații analoge privind și celelalte modalități ne duc la concluzia că ele nu pot fi interpretate ca niște probabilități. Totuși, tabelele de adevăr ale logicii modalităților[24] sînt perfect identice cu cele ale logicii trivalente obținute pentru cazul cînd numărul propozițiilor din șiruri este $n = 2$ (considerînd evident în locul celor trei valori de adevăr 1, $\frac{1}{2}$ și 0, cele trei modalități: *necesar*, *posibil* și *imposibil*).

$M(fx_i)$	$M(\overline{fx_i})$
Nc	*Im*
Ps	*Ps*
Im	*Nc*

$M(fx_i)$	$M(gy_i)$	$M(fx_i, gy_i)$	$M(fx_i \vee gy_i)$	$M(fx_i . gy_i)$	$M(fx_i \supset gy_i)$	$M(fx_i \equiv gy_i)$	$M(gy_i, fx_i)$
Nc	*Nc*	*Nc*	*Nc*	*Nc*	*Nc*	*Nc*	*Nc*
Nc	*Ps*	*Ps*	*Nc*	*Ps*	*Ps*	*Ps*	*Nc*
Nc	*Im*	*Im*	*Nc*	*Im*	*Im*	*Im*	?
Ps	*Nc*	*Nc*	*Nc*	*Ps*	*Nc*	*Ps*	*Ps*
Ps	*Ps*	*Im, Ps, Nc*	*Ps, Nc*	*Im, Ps*	*Ps, Nc*	*Im, Ps, Nc*	*Im, Ps, Nc*
Ps	*Im*	*Im*	*Ps*	*Im*	*Ps*	*Ps*	?
Im	*Nc*	?	*Nc*	*Im*	*Nc*	*Im*	*Im*
Im	*Ps*	?	*Ps*	*Im*	*Nc*	*Ps*	*Im*
Im	*Im*	?	*Im*	*Im*	*Nc*	*Nc*	?

[24] Modalitățile pot fi aplicate tuturor operațiilor cu șiruri de propoziții: disjuncției, conjuncției etc. În particular, operațiilor de selecție (fx_i, gy_i) și (gy_i, fx_i). Numai că în aceste cazuri apar

În rîndul din mijloc apar nedeterminările despre care am menționat că sînt inerente logicilor cu un număr finit, mai mare ca doi, de valori[25]. Cînd șirurile (fx_i) și (gy_i) au modalitatea *posibil*, compușii formați cu ele pot avea mai multe modalități, ceea ce corespunde, de fapt, înțelesului normal al lucrurilor. Spre exemplu, cînd două evenimente sînt posibile, nu este determinat dacă conjuncția lor este, de asemenea, posibilă, căci ele ar putea să se excludă reciproc. De asemenea disjuncția lor poate fi și necesară. Dacă, de pildă, aruncăm o monedă, este necesar ca sau una sau cealaltă dintre fețele sale să iasă, dar este imposibil ca să iasă amîndouă.

Definițiile modalităților pot fi aplicate și compușilor funcționali de forma fx_i, gy_i. În acest caz însă, termenii de rang i, pentru care fx_i este o propoziție falsă, sînt înlăturați, căci pentru ei tabela de la p. 290 indică un semn de întrebare, compusul individual nemaifiind o propoziție și deci operatorul M neputîndu-se aplica. În baza acestei reguli, modalitatea compusului fx_i, gy_i poate fi determinată, cu excepția cazului cînd (fx_i) are modalitatea *imposibil* (tabela de mai sus)[26].

* 8.4. Logica ponderii. Noțiuni preliminare

Logica probabilităților, așa cum am văzut că este construită, nu presupune în nici un fel posibilitatea determi-

---

excepții. Cînd spre exemplu (fx_i) conține doar propoziții false, deci are modalitatea *imposibil*, matricele din paragraful precedent nu dau pentru compusul (fx_i, gy_i) nici o valoare determinată, fapt însemnat printr-un semn de întrebare. În logica modalităților el este, de asemenea, un caz de nedeterminare și de aceea a fost notat prin același simbol.

[25] În logica probabilităților, cunoașterea probabilității compusului (fx_i, gy_i) ne permitea aflarea probabilității oricăruia din ceilalți compuși pe baza formulelor (1) — (6). În logica modalităților, modalitatea lui (fx_i, gy_i) nu determină cu nimic modalitățile celorlalți compuși.

[26] **H. Reichenbach**, *op. cit.*, p. 405.

nării pentru fiecare propoziție în parte a gradului său de adevăr sau probabilitate. Conform interpretării prin frecvență a probabilității, aceasta nu poate fi atribuită decît șirurilor de evenimente sau propoziții despre evenimente, ceea ce restrînge, fără îndoială, domeniul de aplicație a logicii probabilităților.

Reichenbach găsește însă că o astfel de gradare a adevărului unei propoziții este cîteodată foarte naturală, iar principiul dihotomiei, după care noi clasificăm orice afirmație în adevărată sau falsă, este doar unul dintre modurile posibile de a proceda. Putem însă apela la o verificare cantitativă, ordonînd faptele în raport cu gradul în care satisfac afirmația respectivă. În felul acesta putem atribui afirmației un grad de adevăr depinzînd de faptele observate. Pentru a înțelege mai bine, să analizăm următorul exemplu. Un țintaș spune: „Voi lovi în centru". După tragere măsurăm distanța r dintre punctul lovit și centrul țintei; r reprezintă o măsură a gradului de adevăr al afirmației făcute de țintaș. Pentru a obține numai valori cuprinse între 0 și 1, putem tot atît de bine considera drept măsură expresia $\frac{1}{1+r}$.

Se pune acum problema construirii unei logici a probabilităților pentru propozițiile individuale; adică, în care locul șirurilor (infinite) de propoziții îl vor lua propozițiile individuale. Reichenbach o construiește printr-un transfer fictiv al proprietăților șirurilor de propoziții, propozițiilor individuale. Spre exemplu, vom putea scrie de aici încolo $P(a) = p$, unde a este o simplă propoziție; p va măsura astfel *ponderea* propoziției a. Dar ce semnificație probabilistică mai poate avea o asemenea pondere? Reichenbach analizează în amănunțime această chestiune[27].

Valoarea principală a judecăților de probabilitate stă în posibilitatea de a prevedea un fapt. Sub acest aspect unii au privit aplicarea probabilităților evenimentului singular ca pe un „grad al așteptării" *(degree of expectation)* evenimentului, ceea ce face din ea însă o mărime greu de apreciat obiectiv. Așa cum observă Reichenbach, dacă

[27] *Ibidem*, § 71.

putem ajunge să corectăm aprecierea acestei aşteptări la justa ei valoare, atunci trebuie să existe şi o interpretare a probabilităţii independentă de ea.

Un al doilea mod de a privi probabilitatea evenimentului singular stă în enumerarea completă a termenilor unei disjuncţii dintre care nu avem motive să preferăm pe vreunul. Este cazul clasic al zarului perfect, care, odată aruncat, poate cădea cu oricare din cele şase feţe ale sale.

În sfîrşit, un al treilea mod constă în renunţarea la a defini noţiunea de probabilitate cu ajutorul altor concepte; deci de a o lua printre noţiunile primitive ale teoriei. Cînd spunem, aşadar, că probabilitatea ca un eveniment să aibă loc este p (spre exemplu să apară faţa „6" cînd arunc un zar este $\frac{1}{6}$), facem o afirmaţie cu un înţeles de sine stătător, asemenea înţelesurilor celorlalte noţiuni primitive din logică. Se mai spune că legile probabilităţii ar constitui o *logică cantitativă*, bazată pe o evidenţă proprie, asemănătoare celei din logica obişnuită. Susţinătorii unor astfel de idei sînt J. M. Keynes, H. Jeffreys şi alţii.

Reichenbach respinge însă toate aceste explicaţii. După părerea sa, singurul mod plauzibil de a interpreta noţiunea de probabilitate este *frecvenţa*. Am văzut însă că acesta se referă nu la un eveniment singular, ci la o clasă întreagă de evenimente. Aşadar, probabilitatea evenimentului singular (sau propoziţiei despre acesta) este un pseudoconcept, care trebuie înlocuit printr-un substitut construit în termenii probabilităţilor unor clase. Vom considera cazul individual drept limita unor clase, devenind din ce în ce mai restrînse. Problema alegerii acestora, numită de Reichenbach „problema clasei de referinţă" *(the problem of reference class)*, este destul de complicată şi nu putem intra aici în detalii. Reţinem doar atît: judecata despre probabilitatea cazului singular nu are un înţeles de sine stătător, ci reprezintă un mod eliptic de exprimare. Pentru a-i acorda totuşi un înţeles, ea trebuie tradusă printr-o afirmaţie despre frecvenţă într-un şir de evenimente, în aşa fel încît afirmaţiei despre probabilitatea cazului singular i se acordă un sens fictiv, obţinut prin transferul înţelesului de la cazul general la cel particular. Acest mod

de a proceda este, după Reichenbach, justificabil, dar nu pentru motive de cunoaştere, ci din motive pragmatice[28]. Logica obţinută din logica probabilităţilor prin acest transfer este numită de Reichenbach *logica ponderii*. Logica ponderii şi logica şirurilor de propoziţii au aceeaşi structură: aceleaşi reguli de calcul şi aceleaşi legi. Cu un cuvînt, sînt *izomorfe*. Aşadar, de aici încolo le vom trata sub numele comun de logica probabilităţilor.

* 8.5. Tautologiile logicii probabilităţilor. Deducerea tautologiilor din prima categorie

Constituenţii logicii probabilităţilor (şiruri de propoziţii sau propoziţii simple) vor fi notaţi prin a, b, c etc. Lor li se aplică operaţiile logice: disjuncţia, conjuncţia, implicaţia şi echivalenţa, precum şi operaţia de selecţie notată a,b[29]. Ele sînt funcţii de adevăr care depind de trei argumente, şi anume de $p = P(a)$, $q = P(b)$ şi $u = P(a, b)$; p, q şi u nu pot avea, după cum am văzut, orice valori, ci doar acelea pentru care sînt îndeplinite condiţiile[30]:

$$u \leqslant \frac{q}{p} \tag{7}$$

$$\frac{p + q - 1}{p} \leqslant u \tag{8}$$

$$P(a,a) = 1 \tag{9'}$$

---

[28] *Ibidem*, p. 377.

[29] Operaţia de selecţie pentru propoziţii rezultă prin transferul fictiv al operaţiei de selecţie pentru şirurile de propoziţii. Valoarea sa de adevăr pentru cazul cînd a şi b iau doar valorile 1 şi 0 este dată prin definiţie de valorile corespunzătoare din coloana a treia a tabelei din *8.2. Cu excepţia cazului cînd $a = 0$ şi în tabela respectivă apare semnul „?"; atunci compusul a, b nu se consideră definit.

[30] Vedeţi *8.2.

În acest caz, probabilitățile celor șase operații cu a și b sînt date în funcție de p, q și u de următoarele formule:

$$P(a \vee b) = p + q - pu \tag{1'}$$

$$P(a \,.\, b) = pu \tag{2'}$$

$$P(a \supset b) = 1 - p + pu \tag{3'}$$

$$P(a \equiv b) = 1 - p - q + 2pu \tag{4'}$$

$$P(b,a) = \frac{pu}{q} \tag{5'}$$

$$P(\bar{a}) = 1 - p \tag{6'}$$

În particular, cînd p și q iau doar valorile 1 și 0, se obțin probabilitățile înscrise în tabela de la *8.2.

Vom putea acum defini *tautologiile* logicii probabilităților în perfectă concordanță cu tautologiile logicii bivalente (și cu ale oricărei logici polivalente). Ele sînt acele formule care capătă probabilitatea 1 indiferent de probabilitățile pe care le iau constituenții lor. Să urmărim însă modul specific în care le tratează Reichenbach.

Mai întîi el le împarte în două categorii. Celor din prima categorie le corespund analoge în logica bivalentă obișnuită. Numai că, spre deosebire de acestea din urmă, nu sînt puse sub forma simplă a unor formule de calcul propozițional, ci sub forma unor identități ce stabilesc că probabilitatea unei asemenea formule este 1. De exemplu:

$$P(a \vee \bar{a}) = 1$$

A doua categorie de tautologii exprimă relațiile ce există între diverse probabilități; de exemplu:

$$P(b) = P(a) \cdot P(a, b) + [1 - P(a)] \cdot P(a, b)$$

Ne vom ocupa mai întîi doar de primele, arătînd cum pot fi deduse din formulele 1′ — 6′ și din tabela de la *8.2.

Orice tautologie a logicii bivalente conduce la o tautologie a logicii probabilităților; de pildă:

$$P(a \cdot a \equiv a) = 1$$

Aceasta poate părea evident dacă ținem seama de faptul că probabilitatea oricărei expresii compuse este o funcție de probabilitățile componentelor, funcție care, așa cum o arată tabela de la *8.2, coincide, în cazul cînd componentele iau doar valorile 1 și 0, cu funcția corespunzătoare de adevăr din logica bivalentă.

Noi însă vom demonstra formula de mai sus arătînd cu acest prilej de ce trebuie adăugată logicii probabilităților condiția $P(a, a) = 1$. În demonstrație utilizăm, așa cum am mai spus, egalitățile $1' - 6'$, precum și regula de substituție (așa cum apare ea în orice calcul propozițional).

$$P(a.a) = P(a) \cdot P(a,a) \qquad \text{(conf. 2')}$$

$$\underline{P(a,a) = 1} \qquad (9')$$

$$P(a.a) = P(a) \qquad (10)$$

În $P\ (a,a) = 1$, substituind pe a cu $a.b$, obținem

$$P(a.b\ ,\ a.b) = 1$$

$$P(a.b\ ,\ a.b) = P(a.b\ ,\ a) \cdot P(a.b.a\ ,\ b) \quad \text{(conf. 2')}$$

Deci produsul din membrul drept este 1 și cum nici unul din factori nu poate fi mai mare ca 1 (fiind vorba de niște probabilități) rezultă:

$$P(a.b\ ,\ a) = 1$$

$$P(a.b.a\ ,\ a) = 1$$

Substituind în prima din ele pe b cu a, rezultă

$$P(a.a\ ,\ a) = 1,$$

care împreună cu (10) pe baza lui (4') demonstrează tautologia

$$P(a.a \equiv a) = 1$$

Observăm că, dacă am fi putut înlocui în paranteză $a.a$ cu echivalenta sa a, demonstrația ar fi fost imediată.

Să studiem atunci în cele ce urmează:

Regula înlocuirii expresiilor echivalente.

În logica probabilităţilor această regulă are următorul enunţ[31].

Dacă formula:

$$P(b \equiv c) = 1 \tag{11}$$

este deductibilă, deci o tautologie, putem înlocui b cu c în argumentul oricărei probabilităţi avînd valoarea 1, fără să-i schimbăm valoarea.

Demonstraţie. Vom arăta mai întîi că dacă (11) are loc, atunci

$$P(b) = P(c)$$

Notăm: $P(b) = p$, $P(c) = q$, $P(b,c) = u$, $P(c,b) = v$. Atunci din (11) şi (4′) rezultă:

$$1 - p - q + 2pu = 1 \tag{12}$$

$$u = \frac{p + q}{2p} \tag{13}$$

Prima condiţie restrictivă (7) dă

$$u \leqslant \frac{q}{p}$$

în care, făcînd substituţia indicată de (13), găsim:

$$p \leqslant q. \tag{14}$$

Fiind vorba de o probabilitate, $0 \leqslant u \leqslant 1$ şi conform (5′),

$$u = \frac{vq}{p} \leqslant 1$$

$$v \leqslant \frac{p}{q}. \tag{15}$$

[31] După cum am văzut (*3.7), ea era valabilă şi în logica bivalentă.

Inserînd pe $u = \frac{vq}{p}$ în (12) căpătăm

$$1 - p - q + 2qv = 1$$

$$v = \frac{p+q}{2p} \tag{16}$$

Din (15) și (16)

$$q \leqslant p \tag{17}$$

Din (14) și (17) $p = q$ *c.c.t.d.*

Deși p apare la numitor în (13), concluzia este valabilă și pentru $p = 0$, căci atunci neapărat $q = 0$, altfel $u = \frac{p+q}{2p}$ n-ar putea fi $\leqslant 1$.

Și acum vom arăta că dacă (11) are loc, atunci

$$P(b,c) = 1 \tag{18a}$$

și $$P(c,b) = 1 \tag{18b}$$

Ceea ce, în ipoteza că $p > 0$, rezultă imediat din (13), (16) și faptul că $p = q$.

De asemenea, se poate arăta că dacă (11) are loc, atunci

$$P(a,b) = P(a,c) \tag{19}$$

Mai întîi, dacă $P(d) = 1$, atunci $P(a,d) = 1$, oricare ar fi a cu $P(a) > 0$, căci din a doua condiție restrictivă rezultă că dacă $P(d) = 1$ atunci $P(d,a) = P(a)$; deci, în baza formulei (5'), $P(a,d) = 1$. În particular, luînd drept d pe $b \equiv c$, și cum (11) ne asigură de îndeplinirea condiției $P(d) = 1$, pentru orice a cu $P(a) > 0$ avem

$$P(a\ ,\ b \equiv c) = 1 \tag{20}$$

Pentru a putea manipula probabilități de tipul acesteia, adică în care după virgulă apar propoziții compuse, Reichenbach utilizează următoarea regulă drept adaus la regula de substituție.

Regula α: Dacă se poate deduce o relație între probabilitățile $P(x_1)$, $P(x_2)$..., atunci fiecare x_i din acestea poate

fi substituit prin a,x_i cu condiția ca a să fie în toate aceste expresii același. Expresiile de forma $a(x,y)$ care pot rezulta din asemenea substituții vor fi înlocuite prin $a \,.\, x \,,\, y$[32].

Aplicînd această regulă și notînd

$$P(a,b) = p,\ P(a,c) = q,\ P(a.b,c) = u,\ P(a.c,b) = v,$$

relația (20) poate fi scrisă sub forma (12), din care, parcurgînd același șir de raționamente, obținem (19).

(19), pe baza egalității (5'), dă

$$P(b,a) = P(c,a)$$

dacă $P(b) > 0$ și $P(c) > 0$.

Cu rezultatele obținute pînă în prezent rezultă imediat că dacă (11) are loc, atunci

$$P(d.b \equiv d.c) = 1$$

$$P(d \vee b \equiv d \vee c) = 1$$

La fel și celelalte condiții necesare aplicării regulei de înlocuire[33].

Se poate arăta de asemenea — noi n-o vom face — că relațiile obținute rămîn valabile și fără condițiile pe care le-am pus în cursul demonstrației ca anumite probabilități să fie nenule. Reichenbach introduce:

Regula β. Dacă o formulă este derivabilă pentru $P(a) > 0$, atunci ea are loc și pentru $P(a) = 0$.

Utilizînd regula de înlocuire, se pot deduce analogele tuturor tautologiilor din logica bivalentă sub forma unor tautologii din prima categorie.

---

[32] Spre exemplu, înlocuind în probabilitatea $P(b, c)$ pe b cu a,b obținem, conform acestei reguli, $P(a.b, c)$.

[33] Demonstrarea regulei de înlocuire a expresiilor echivalente într-o formulă a calculului propozițional se poate face prin inducție completă în raport cu numărul de semne din această formulă. În acest scop, presupunînd $b \equiv c$, este necesar să putem arăta că $\bar{b} \equiv \bar{c}$ și pentru orice d : $d.b \equiv d.c$, $d \vee b \equiv d \vee c$, $d \supset b \equiv d \supset c$, $b \supset d \equiv c \supset d$, $(b \equiv d) \equiv (c \equiv d)$ (a se vedea, de exemplu, **H. Reichenbach**, *Elements of Symbolic Logic*, p. 60).

Trebuie remarcat că în logica probabilităţilor ele nu mai păstrează înţelesul pe care îl aveau în calculul propoziţional clasic, deoarece operaţiile logice odată cu schimbarea matricelor de adevăr şi-au schimbat şi semnificaţia. Numai cînd reducem domeniul de probabilitate la valorile 0 şi 1 revin şi ele la semnificaţia obişnuită.

Rămîne o deosebire în modul de aserţiune. Primele sînt asertate scriindu-le pur şi simplu. În logica probabilităţilor însă, aceasta se face prin intermediul funcţiei P:

$$P(a \vee \bar{a}) = 1, \text{ după cum am văzut.}$$

Diferenţa se poate şterge uşor, introducînd:

Regula de aserţiune. O formulă avînd probabilitatea 1 poate fi asertată, cu excepţia cazului în care simultan are şi probabilitatea 0.

Astfel toate tautologiile logicii bivalente pot fi asertate în logica probabilităţilor. Nu şi reciproc. Spre exemplu, formula:

$$a,a$$

poate fi asertată în logica probabilităţilor pentru $P(a) > 0$, căci am văzut că $P(a,a) = 1$. Ea nu apare printre tautologiile calculului propoziţional, unde nu figurează operaţia de selecţie.

Vom trece acum la studiul celei de-a doua categorii de tautologii.

✠ 8.6. Tautologiile din a doua categorie. Negaţia cantitativă

Din a doua categorie fac parte, după cum am văzut, tautologiile ce exprimă relaţii între probabilităţi. Pentru a le putea aserta ca şi pe cele din logica bivalentă, cum am reuşit să facem cu cele din prima categorie, ne trebuie un mijloc de a exprima probabilitatea unei propoziţii fără

utilizarea simbolului *P*. Acesta este *negația cantitativă*.

Post își construise logicile sale polivalente plecînd de la o negație dată în cazul trivalent de matricea

a	$\sim a$
t_3	t_2
t_2	t_1
t_1	t_3

(în notația lui, t_1, t_2, t_3 sînt valorile de adevăr indexate în ordine crescătoare, t_1 = falsul, t_3 = adevărul)[34]. Ea se numește *ciclică*, căci, după cum se poate observa, are drept efect permutarea circulară a celor trei valori de adevăr. Asertarea lui

$$\sim a$$

înseamnă atunci, conform liniei a treia din matrice, afirmarea faptului că a ia valoarea t_1 (fals). Asertarea lui

$$\sim \sim a$$

va echivala cu afirmarea faptului că a ia valoarea t_2. În sfîrșit, asertarea lui

$$\sim \sim \sim a$$

echivalează cu afirmarea faptului că a este adevărat. Prin urmare, numărul de negații puse în fața lui a arată însuși indicele valorii sale de adevăr.

Într-o logică cu n valori ar fi necesar să întrebuințăm pînă la n semne de negație. În logica probabilităților, cu scara sa continuă de valori, procedeul trebuie puțin modificat. În loc să repete numărul semnelor $\sim$, Reichenbach afectează negația, pe care o numește *cantitativă*, de o varia-

---

[34] **E. L. Post**, *Introduction to a General Theory of Elementary Propositions*, în „American Journal of Mathematics", 43, 1921, pp. 163—185.

bilă w, ce poate lua orice valori între 0 şi 1. Vom vede analogia între w şi numărul de negaţie. Notîndu-şi negaţi cantitativă aplicată unei propoziţii a prin

$$\lceil w \rceil a,$$

el o defineşte pe baza următoarei egalităţi

$$\lceil q \rceil a = p - w + \delta_{p-w},$$

unde p reprezintă valoarea $P(a)$, iar numărul δ_{p-} este $+1$, 0 sau -1 după cum $p - w \leqslant 0$, $0 < p - w <$ şi respectiv $p - w = 1$. Efectul acestei negaţii depind de probabilitatea lui a. Dacă $p > w$, probabilitatea lu $\lceil w \rceil a$ va fi mai mică decît $P(a)$; cînd $p = w$, această pro babilitate sare brusc la 1, iar cînd $p < w$ ea devine ma mare ca $P(a)$. Se poate verifica uşor că singurul caz î care $\lceil w \rceil a$ are probabilitatea 1 este cel în care $w = P(a)$ Prin urmare afirmarea propoziţiei

$$\lceil p \rceil a$$

este echivalentă cu afirmarea faptului că $P(a) = p$. Aşadar $\lceil p \rceil$ are acelaşi rol ca şi numărul semnelor $\sim$ puse în faţ unei propoziţii. El poate fi utilizat, evident, nu numai î faţa propoziţiilor simple, ci şi în faţa compuşilor func ţionali.

Alături de acest nou fel de negaţie, va putea apare ş negaţia obişnuită definită de (6').

Astfel tautologiile de a doua categorie se pot scrie făr simbolul P, dar utilizînd negaţia cantitativă. De exemplu formula

$$P(a) + P(\bar{a}) = 1$$

poate fi scrisă sub forma

$$[P(a) = p] \supset [P(\bar{a}) = 1 - p],$$

unde simbolul $\supset$ reprezintă implicaţia bivalentă obişnuită Ceea ce în termenii negaţiei cantitative ar putea fi scri

$$\lceil p \rceil a \rightarrow \lceil 1 - p \rceil a \qquad (21$$

Săgeata reprezintă aici tot un fel de implicație, distinctă în orice caz de implicația definită în logica ponderei prin relația (3′). Dacă ea ar coincide cu aceasta, relația (2′) n-ar mai reprezenta o tautologie și n-ar mai fi adevărată decît în cazul în care $P(a) = p$ (p trebuie privită aici ca o constantă, pe cînd probabilitatea lui a poate varia).

Implicația „$\rightarrow$" este definită de Reichenbach prin matricea

$P(a)$	$P(b)$	$P(a \rightarrow b)$
1	1	1
1	< 1	0
< 1	$\leqslant 1$	1

și este deci falsă doar cînd $P(a) = 1$ și $P(b) < 1$. Deoarece poate lua doar două valori de adevăr, 1 și 0, ea se numește *implicație alternativă (alternative implication)*. Cu ajutorul ei și al negației cantitative pot fi reprezentate toate tautologiile din categoria a doua. De pildă, exemplul dat la începutul paragrafului anterior,

$$P(b) = P(a) \cdot P(a,b) + [1 - P(a)] \cdot P(\bar{a},b)$$

devine

$$\lceil p \rceil a \cdot \lceil u \rceil (a,b) \cdot \lceil v \rceil (a,b) \rightarrow \lceil pu + (1 - p)v \rceil b$$

care este o tautologie.

Metodele de demonstrare ale unor astfel de tautologii sînt aceleași ca și în calculul propozițional: regula de substituție și regula de înlocuire a expresiilor echivalente (care am demonstrat că este valabilă); de asemenea *modus ponens*, sub două forme:

$$\frac{a \qquad a \rightarrow b}{b}$$

$$\frac{a \qquad a \supset b}{b},$$

a doua implicație fiind cea definită prin (4'). Justificarea este imediată, ținînd seama de definițiile celor două implicații.

* 8.7. Sistemul 5 al lui Lewis, din punctul de vedere al calculului probabilităților

Logicianul american N. Rescher[35] a arătat cum poate fi conceput din punct de vedere probabilist un sistem al logicii modale, și anume sistemul 5 al lui Lewis (*4.12).

Pentru aceasta să presupunem, așa cum am făcut-o în ultimele două paragrafe, că dispunem de un mijloc de determinare a probabilității propozițiilor (numită în acest caz și pondere). Probabilitatea unei propoziții a am notat-o cu $P(a)$. Vom presupune că, pe lîngă faptul că satisfac relațiile $1' - 6'$, această probabilitate este astfel încît dacă $P(a) = 1$, atunci a este adevărată ($a = 1$), iar dacă $P(a) = 0$, atunci a este falsă ($a = 0$)[36]. (Comparînd acest ultime două condiții cu cele spuse în *8.2, ajungem la concluzia că ne-am situat astfel în cazul în care clasa de referință față de care determinăm ponderea unei propoziții este finită).

Sistemele lui Lewis considerau pe lîngă propozițiile simple și modalitățile acestora:

„a este necesar" notat $\Box\ a$

„a este posibil" notat $\Diamond\ a$,

considerate la rîndul lor propoziții.

Rescher definește „$\Box a$ este adevărată" (adică „a este necesară") prin „probabilitatea lui a este 1", $P(a) = 1$. În plus probabilitatea $P(\Box a)$ nu poate lua decît valorile 1 și 0.

---

[35] **N. Rescher,** *A Probabilistic Approach to Modal Logic,* în „Act Philosophica Fennica", fasc. 16 (1963), pp. 215—226.

[36] Condițiile impuse astfel lui P, fiind mai restrictive decît cele din *8.2, toate rezultatele demonstrate acolo rămîn valabile și aici (dar nu și reciproc).

„Posibilitatea" poate fi definită cu ajutorul „necesităţii"[37], şi anume

$$\Diamond a \text{ drept } \overline{\Box \bar{a}}\ ^{38},$$

prin urmare în limbaj de probabilitate ea înseamnă „probabilitatea lui a nu este 0": $P(a) \neq 0$[39].

Ideea principală pe care Lewis urmărise s-o formalizeze în sistemele sale era, după cum am văzut, implicaţia strictă. El ajunsese la concluzia că este o implicaţie materială necesară[40]. Pe aceasta o utilizează Rescher drept însăşi definiţie a implicaţiei stricte

$$a \prec b \text{ înseamnă } \quad \Box (a \supset b),$$

căci ambele noţiuni „necesitatea" şi „implicaţia materială" au fost deja expuse în termeni de probabilitate (relaţia $\supset$ a fost definită prin egalitatea (3′)).

Odată lămurite aceste chestiuni, vom numi o *M-tautologie* orice formulă din logica lui Lewis a cărei probabilitate calculată după regulile de mai sus este 1, indiferent de probabilităţile pe care le iau variabilele sale propoziţionale[41], şi vom demonstra că aceste M-tautologii coincid exact cu formulele care pot fi deduse în sistemul 5 (*4.12). Mai întîi însă vom da cîteva proprietăţi ajutătoare expuse sub titlul de reguli.

Pentru a exprima faptul că o formulă a este o M-tautologie vom pune în faţa ei semnul $|M \vdash$ (semnul de aserţiune precedat de un M).

---

[37] După cum am văzut, Lewis proceda invers.

[38] Vom continua să utilizăm aici, ca şi în paragrafele anterioare, pentru negaţie semnul „¯".

[39] Nu putem face o comparaţie directă între aceste modalităţi definite pentru propoziţii şi cele propuse de Reichenbach (*8.3) definite pentru şirurile de propoziţii. Totuşi o simplă observaţie ne arată că pe cînd „posibilitatea" lui Reichenbach era, după cum am remarcat, „strictă", cea definită aici nu e strictă (nu exclude necesitatea).

[40] Vedeţi *4.14.

[41] Deşi Rescher defineşte M-tautologiile într-un mod diferit, noi l-am preferat pe acesta, deoarece este într-o mai bună concordanţă cu prezentarea de pînă acum a logicii probabilităţilor.

Regula 1. Dacă $|M \vdash a_1 \supset a_2$, atunci $P(a_1) \leqslant P(a_2)$

Demonstrație: După cum am arătat în *8.4, deoarece

$$a_1 \supset a_2 . \equiv . \bar{a}_1 \vee a_2$$

este o tautologie în logica bivalentă, ea va rămîne o tautologie și în calculul probabilităților și deci

$$P(a_1 \supset a_2 . \equiv . \bar{a}_1 \vee a_2) = 1.$$

Dar, așa cum am demonstrat, atunci

$$P(a_1 \supset a_2) = P(\bar{a}_1 \vee a_2)$$

și, pe baza ipotezei $P(a_1 \supset a_2)=1$, de asemenea $P(\bar{a}_1 \vee a_2)=1$. Atunci, conform (1'),

$$1 \leqslant P(\bar{a}_1) + P(a_2) = 1 - P(a_1) + P(a_2),$$

de unde:

$$P(a_1) \leqslant P(a_2) \quad c.c.t.d.$$

Regula 2. Dacă $|M \vdash a_1 \supset a_2$ și $|M \vdash a_1$, atunci $|M \vdash a_2$

Demonstrația este imediată dacă ținem seama de regula anterioară și de faptul că o probabilitate poate fi cel mult egală cu 1.

Regula 3. $|M \vdash a_1 . a_2$ dacă și numai dacă atît $|M \vdash a_1$ cît și $|M \vdash a_2$.

Demonstrație:

(i) Dacă $|M \vdash a_1 . a_2$, atunci $P(a_1 . a_2) = 1$. Și cum pe baza lui (2') atît $P(a_1)$ cît și $P(a_2)$ sînt $\geqslant P(a_1 . a_2)$, rezultă că ambele sînt 1.

(ii) Dacă $|M \vdash a_1$ și $|M \vdash a_2$, $P(a_1) = P(a_2) = 1$. Dar conform (1') și (2'), $P(a_1 . a_2) = P(a_1) + P(a_2) - P(a_1 \vee a_2) = 2 - P(a_1 . a_2)$, de unde $P(a_1 . a_2) = 1$; deci și $|M \vdash a_1 . a_2$ *c.c.t.d.*

Regula 4. Dacă $|M \vdash a_1 \equiv a_2$, atunci $P(a_1) = P(a_2)$

Ceea ce este evident, căci am arătat (*8.4) că din $P(a_1 \equiv a_2) = 1$ rezultă $P(a_1) = P(a_2)$.

Din regulile 2 și 4 rezultă că *modus ponens* și regula înlocuirii expresiilor echivalente (*8.4) păstrează proprietatea unei formule de a fi M-tautologie (cînd premisele sînt M-tautologii, concluziile sînt, de asemenea, M-tautologii). În particular, dacă axiomele unui sistem de calcul propozițional au această proprietate, toate teoremele sistemului o vor avea.

Regula 5. Dacă $a_1 \supset a_2$ este o teoremă a logicii bivalente, atunci $\mid M \vdash a_1 \prec a_2$.

Deoarece atunci, după cum am arătat, $P(a_1 \supset a_2) = 1$ și, în baza definiției „necesității", $P(\Box(a_1 \supset a_2)) = 1$.

Regula 6. $\mid M \vdash a_1 \prec a_2$ dacă și numai dacă $P(\bar{a}_1 \vee a_2) = 1$. Această regulă este evidentă.

În baza regulei 5 rezultă imediat

1. $\mid M \vdash ab \,.\prec\, .\, ba$
2. $\mid M \vdash ab \,.\prec\, .\, a$
3. $\mid M \vdash ab \,.\prec\, .\, b$
4. $\mid M \vdash a \,.\prec\, .\, aa$
5. $\mid M \vdash (ab)c \,.\prec\, .\, a(bc)$
6. $\mid M \vdash a(bc) \,.\prec\, .\, (ab)c$
7. $\mid M \vdash a \prec \bar{\bar{a}}$

De asemenea, au loc și următoarele M-tautologii:

8. $\mid M \vdash \Box\, a \prec a$

Demonstrație:
Distingem două cazuri:

$P(a) = 1$ și, cum $P(\overline{\Box a} \vee a) \geqslant P(a)$, rezultă că

$P(\Box\, a \prec a) = P(\overline{\Box a} \vee a) = 1.$

$P(a) \neq 1$, deci $P(\Box a) = 0$, $1 = P(\overline{\Box a}) \leqslant P(\overline{\Box a} \vee a)$

și prin urmare

$$P(\Box a \prec a) = 1.$$

Tot astfel se pot demonstra

9. $| M \vdash a \prec b \,.\, b \prec c : \prec \,.\, a \prec c$

10. $| M | - a \,.\, a \prec b : \prec b$

Teoremele 1, 2, 4, 5, 7, 9 și 10 sînt chiar postulatel sistemului 1 al lui Lewis[42]. Acestea fiind M-tautologii toate tezele sistemului vor fi M-tautologii. De aceeaș proprietate se bucură și:

11. $| M \vdash \Box a \prec \Box \Box a$

Demonstrație: Distingem două cazuri:

$P(a) = 1$, $P(\Box a) = 1$, $P(\Box \Box a) = 1$, $P(\overline{\Box a} \vee \Box \Box a) =$

deci: $P(\Box a \prec \Box \Box a) = 1$.

$P(a) \neq 1$, $P(\Box a) = 0$, $P(\overline{\Box a}) = 1 - P(\Box a) = 1$

$P(\overline{\Box a} \vee \Box \Box a) = 1$,

deci $P(\Box a \prec \Box \Box a) = 1$.

Cum 11 este axioma care adăugată celorlalte șapte n furnizează sistemul 4[43], rezultă că și teoremele acestu sistem sînt M-tautologii. În sfîrșit, tot M-tautologi este și

12. $| M \vdash \Diamond a \prec \Box \Diamond a$,

demonstrația fiind perfect analogă celei dinainte. Aceast formulă adăugată ca postulat celorlalte șapte permite după cum am arătat[44], reducerea tuturor modalităților la șase și obținerea sistemului 5. Prin urmare teoremel acestuia sînt, de asemenea, M-tautologii.

Rescher izbutește să arate că și reciproc orice M-tauto logie poate fi demonstrată în S5.

---

[42] Vedeți *4.4.
[43] Vedeți *4.11.
[44] Vedeți *4.12.

* 8.8. Consideraţii generale

După cum am mai spus, construindu-şi logica polivalentă pe modelul calculului probabilităţilor, Reichenbach se vede eliberat de arbitrariul care a stat la baza celorlalte construcţii de acest gen (am menţionat la momentul potrivit că, de exemplu, Łukasiewicz, atunci cînd şi-a construit logica trivalentă, avea la îndemînă de fapt mai multe implicaţii, dintre care el a ales doar una — vedeţi nota 18, cap. 5). Logica astfel obţinută are o scară continuă de valori, toate probabilităţile. Ea este o generalizare a logicii bivalente, care apare în cadrul ei ca un caz-limită. Reichenbach atribuie logicii astfel generalizate un caracter cantitativ. Probabilitatea fiind gradul de adevăr al unei propoziţii, şi nu al obiectelor fizice, devine în concepţia lui o proprietate a propoziţiilor. Dar generalizarea astfel dată conceptului de adevăr nu se referă decît la judecăţile provenite din experienţă, adică cele empirice. Ea nu se aplică şi celor matematice, căci, după părerea lui Reichenbach, matematica se referă nu la conceptul de adevăr, ci la cel de tautologie[45].

Cu toate acestea, chiar în cazul judecăţilor empirice, extensiunea pe care o propune pentru logică (concepînd-o ca o logică a probabilităţilor), prin însăşi extensiunea conceptului de adevăr, depăşeşte logica tradiţională. După părerea sa însă, în aceasta problema probabilităţii îşi găseşte soluţia ei ultimă[46]. Căci caracterul bivalent al logicii clasice nu reprezintă decît un principiu de clasificare *(a principle of division)* prin care sînt clasificate afirmaţiile. Principiu care poate fi foarte bine înlocuit prin altul. (Am văzut exemplul ţintaşului de care se serveşte Reichenbach în sprijinul acestei teze). Caracterul bivalent al logicii clasice apare, aşadar, ca o simplă convenţie, comparabilă cu cea adoptată la scrierea numerelor în baza 10.

---

[45] **H. Reichenbach,** *The Theory of Probability*, p. 39.
[46] *Ibidem*, p. 10.

La ce poate servi însă abolirea acestei convenții? La obținerea unei logici mai potrivite experienței științifice moderne. În experiența zilnică obișnuită, fenomenele pe care le întîlnim, avînd un grad înalt de probabilitate, erorile sînt neglijabile și putem foarte bine aproxima această probabilitate cu probabilitatea 1. O astfel de idealizare în care apar doar cele două poziții extreme, adevărul și falsul, poate conveni experienței făcute la această scară. În experiențele în care ne întîlnim însă cu fenomene avînd un grad de probabilitate mai scăzut este necesară înlocuirea unei asemenea logici printr-o logică cu o gradație continuă de valori, cum e logica probabilităților[47].

R. Carnap însă îi reproșează lui Reichenbach că în această privință se înșală. Iată, în rezumat, obiecțiile aduse de el.

Unii filozofi cred, spune el, că conceptul logic de probabilitate înlocuiește conceptul de adevăr. Ei privesc conceptul ultim ca o idealizare nelegitimă; în loc de a spune că o afirmație dată este adevărată, ar trebui să spunem mai corect că ea este confirmată într-un grad foarte mare sau probabil într-un grad foarte mare. Într-un mod asemănător, Reichenbach crede că valorile probabilității (conceptul logic de probabilitate$_1$) ar trebui să ia locul celor două valori de adevăr, adevărul și falsul din logica obișnuită sau, cu alte cuvinte, că logica probabilităților este o logică polivalentă, care înlocuiește logica obișnuită cu două valori. Carnap crede că aceste concepții sînt bazate pe o lipsă de distincție între „adevărat", pe de o parte, și „cunoscut a fi adevărat", „absolut sigur", „complet verificat", „confirmat în grad maxim", „avînd probabilitatea$_1$ 1", pe de altă parte. Conceptul formulat de ultimele expresii în sensul lor cel mai strict este, după Carnap, un concept „absolutizat", care ar trebui să fie înlocuit prin conceptul de probabilitate$_1$, cu scara lui continuă de grade. Amîndouă aceste concepte se referă la o evidență dată; conceptul de adevăr totuși nu este, după el, un asemenea concept și deci el trebuie înțeles ca avînd o natură total diferită. De unde urmează, spune Carnap,

[47] *Ibidem*, p. 397.

că valorile probabilității sînt fundamental diferite de valorile de adevăr. Așadar, logica inductivă, deși introduce o scară continuă de valori ale probabilității$_1$, rămîne o logică cu două valori, ca și logica deductivă[48].

Importanța primară a introducerii valorilor de probabilitate în logică stă în aplicarea acesteia în inducție. Un raționament poate fi, după cum se știe, de două feluri: *deductiv* și *inductiv*. Un raționament deductiv scoate dintr-o propoziție generală o concluzie avînd aceeași generalitate sau mai restrînsă. Raționamentul inductiv dimpotrivă, plecînd de la enumerarea mai multor cazuri particulare, conchide la una generală. De pildă: „deoarece Pămîntul, Marte, Venus etc. sînt toate planete și ele nu au lumină proprie, rezultă că planetele nu au lumină proprie". Ceea ce conferă necesitate unei asemenea concluzii este faptul că am enumerat toate cazurile în cauză. În mod obișnuit însă acest lucru nu este posibil. Legile științei, de pildă, se referă la o infinitate de cazuri posibile, deși au fost stabilite pe baza unui număr limitat de experiențe și observații. În stabilirea lor intervine, așadar, un nou mod de inferență, în care concluzia nu mai urmează cu necesitate din premise, ci cu o anumită probabilitate mai mare sau mai mică. În locul implicației „$\supset$" care stabilește „dacă a este adevărat, atunci cu necesitate b este adevărat" intervine implicația de probabilitate „$\underset{p}{\rightarrow}$", în virtutea căreia din adevărul lui a nu se poate deduce pentru b decît un anumit grad de probabilitate, p. Dar nu putem intra în studiul acestei probleme, ea singură putînd face conținutul unui tratat[49].

---

[48] **R. Carnap**, *Logical Foundations of Probability*, Chicago, 1950, p. 177. Carnap face distincție, după cum am mai spus (*8.1), între probabilitatea ca frecvență, pe care o notează probabilitatea$_2$, și probabilitatea ca grad de confirmare, probabilitatea cazului singular, pe care o notează probabilitatea$_1$.

[49] Pentru aceasta, cititorul este trimis la literatura de specialitate, foarte bogată în acest domeniu. Una dintre lucrările importante este lucrarea lui **G. H. von Wright**, *The Logical Problem of Induction*, New York, 1965, care cuprinde și o amplă bibliografie.

9
Aplicaţiile logicilor polivalente

* 9.1. Introducere

Logicile polivalente şi-au găsit unele aplicaţii atît în domenii teoretice cît şi în domenii concrete, fizice. În cele ce urmează vom înfăţişa cititorului, în ordine cronologică, principalele încercări ce s-au făcut în această privinţă:

— demonstrarea independenţei axiomelor sistemelor formale (Bernays);

— fundamentarea matematicilor intuiţioniste pe logica formalizată de Heyting;

— interpretarea mecanicii cuantice pe baza unei logici trivalente (P. Février şi H. Reichenbach);

— analiza paradoxelor logico-matematice în cadrul unui sistem trivalent (Bocivar);

— studiul schemelor cu contacte şi relee cu ajutorul logicilor cu mai multe valori.

* 9.2. Aplicarea logicilor polivalente la studiul sistemelor formale

După cum am văzut în capitolul 2, studiul sistemelor formale ridică o serie de probleme ca: independenţa axiomelor, necontradicţia lor etc. O serie din ele pot fi rezolvate prin construirea unor logici polivalente.

O asemenea metodă a fost pentru prima dată aplicată de P. Bernays pentru a demonstra independența axiomelor 1.2, 1.3, 1.4 și 1.6 din sistemul bivalent al lui Whitehead și Russell[1]. După modelul ei s-au construit de atunci foarte multe demonstrații, urmărind nu numai independența axiomelor, dar și a regulilor de deducție dintr-un sistem formal, ca și consistența sistemului[2].

Spre exemplificare vom da o astfel de demonstrație, vizînd nedeductibilitatea axiomei 1.2 din celelalte trei axiome în cadrul sistemului bivalent al lui Whitehead și Russell (*3.4). Cele patru axiome la care ne referim sînt:

1.2 $\vdash : p \vee p \,.\supset.\, p$

1.3 $\vdash : q \,.\supset.\, p \vee q$

1.4 $\vdash : p \vee q \,.\supset.\, q \vee p$

1.6 $\vdash :. q \supset r : \supset : p \vee q \,.\supset.\, p \vee r$

Am văzut că matricele bivalente pentru disjuncție și negație fac din toate aceste patru axiome niște tautologii, adică niște formule identic adevărate. Noi căutăm acum însă niște matrice față de care doar ultimele trei axiome să fie tautologii. Prin urmare va trebui să acordăm variabilelor propoziționale cel puțin trei valori de adevăr, să le notăm 1, 2, 3. Pentru moment nu vom da o semnificație decît valorii 1 pe care o vom considera drept valoarea „adevărat". Să definim negația și disjuncția respectiv prin matricele

p	1	2	3
$\sim p$	3	2	1

$\vee$	1	2	3
1	1	1	1
2	1	1	2
3	1	2	3

[1] **P. Bernays**, *Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalküls der „Principia Mathematica"*, în „Mathematisch Zeitschrift", 25 (1926), p. 305.

[2] O trecere în revistă a mai multor rezultate de acest fel se găsește în lucrarea lui **A. Church**, *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton, 1956, § 19.

Atunci matricea implicației $\supset$ poate fi calculată imediat, pe baza definiției acesteia

1.01 $p \supset q \,.=.\, \sim p \vee q$ *Df.*

Obținem:

	$p \supset q$	q 1	2	3
p	1	1	2	3
	2	1	1	2
	3	1	1	1

Se poate ușor verifica că față de aceste matrice ultimele trei axiome 1.3, 1.4 și 1.6 iau invariabil valoarea 1 (adevărat) și prin urmare sînt tautologii.

Orice formulă obținută dintr-o tautologie prin efectuarea unei substituții este evident o tautologie. Totodată, privind matricea de mai sus a implicației, observăm că singurul caz în care implicația este adevărată și primul său membru este adevărat este cazul în care și al doilea membru este adevărat. Prin urmare orice formulă obținută printr-un șir de substituții și aplicări ale regulei *modus ponens* (adică prin „deducție") din axiomele 1.3, 1.4 și 1.6 este, ca și acestea, o tautologie față de matricele trivalente de mai sus.

Cum formula 1.2

$$p \vee p \,.\supset.\, p$$

ia pentru $p = 2$ valoarea 2, ea nu este o tautologie și deci nu face parte dintre formulele deductibile din ultimele trei axiome. Este, prin urmare, *independentă* de ele.

O altă problemă, și anume cea a necontradicției axiomelor unui sistem formal[3], poate fi rezolvată utilizînd aceeași interpretare a tezelor sale drept tautologii față de anumite matrice de adevăr. Să precizăm însă, mai îndeaproape decît am făcut-o în capitolul 2, această problemă,

[3] Vedeți •2.5.1.

în cazul particular al unui sistem de logică formală. Un astfel de sistem se va numi *necontradictoriu* sau *consistent* dacă în interiorul său nu pot fi deduse simultan o formulă p și negația ei non-p. Ceea ce apare în deplină concordanță cu afirmațiile noastre de la începutul acestei lucrări. Sînt însă sisteme formale în care noțiunea de negație a unei propoziții nu apare pur și simplu. Consistența lor va trebui definită fără a face apel la această noțiune. Ținînd seama de cele spuse în capitolul 2, că apariția unei contradicții atrage după sine derivarea tuturor formulelor, vom defini consistența unui sistem de asemenea prin condiția ca să nu putem deduce în el toate formulele posibile[4]. Spre deosebire însă de primul sens al noțiunii de consistență, numit și *consistență relativă la negație*, acest al doilea sens, avînd un caracter mai general, se numește *consistență absolută*. Logicianul american E. L. Post a introdus, pe lîngă acestea două, și un al treilea sens. Un sistem se numește *consistent în sensul lui Post* dacă formula constituită dintr-o singură variabilă propozițională, p, nu poate fi dedusă în interiorul său[5].

Dar să revenim la modul în care putem demonstra efectiv consistența unui anume sistem, de pildă al logicii bivalente. Formulele sale sînt, după cum am mai spus, tautologii în raport cu matricele bivalente de la *3.3. Dar negația unei tautologii este o contradicție (*3.14) și deci nu mai poate fi teză.

Se observă ușor cum orice sistem, odată ce i s-a găsit o interpretare convenabilă utilizînd matrice de adevăr, poate fi demonstrat consistent. Pentru sistemele nebivalente aceste matrice pot conține mai mult de două valori de adevăr și prin urmare interpretarea este polivalentă.

---

[4] Trebuie să facem distincție aici între formulă și teză. O propoziție p și negația ei non-p pot fi amîndouă formule, dar nu sînt amîndouă teze.

[5] **E. L. Post,** *Introduction to a General Theory of Elementary Propositions*, p. 177. Este clar că și aceasta reprezintă o condiție necesară pentru ceea ce am numit mai înainte consistența unui sistem. Căci dacă formula alcătuită dintr-o singură variabilă propozițională e admisă ca teză în sistem, atunci, în baza regulei de substituție, și negația acesteia, non-p, trebuie admisă ca teză.

Astfel, spre exemplu, matricele trivalente folosite în calculul său de Heyting (*6.7) demonstrau pe lîngă nederivabilitatea principiului terțiului exclus și consistența (în toate cele trei sensuri) a sistemului. La fel, datorită faptului că logica lui Łukasiewicz este exprimată prin matrice trivalente, consistența sa este automat asigurată.

Dar logicile modale ale lui Lewis? Pentru a arăta că sînt consistente, este suficient a arăta că S5 este consistent. Căci este lesne de observat, că dacă un sistem este consistent, orice subsistem al său este, de asemenea, consistent. Și, după cum am văzut, sistemele modale S1—S4 sînt subsisteme ale lui S5.

Să presupunem că variabilele propoziționale pot lua patru valori de adevăr, notate respectiv cu 1, 2, 3 și 4, între care 1 reprezintă „adevărul", pe cînd celelalte trei rămîn pentru moment fără o semnificație precizată (se poate arăta totuși că o asemenea semnificație există). Vom defini negația $\sim$ prin următoarea matrice:

p	1	2	3	4
$\sim p$	4	3	2	1

,

posibilitatea lui Lewis „$\Diamond$" prin matricea:

p	1	2	3	4
$\Diamond$	1	1	1	4

,

iar produsul logic (conjuncția) prin matricea[6]:

.	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	4	4
3	3	4	3	4
4	4	4	4	4

Din definiția implicației stricte

11.02 $p \prec q \;.=.\; \sim \Diamond (p \sim q)$

[6] Aceste matrice corespund „grupului III" din *Symbolic Logic* a lui Lewis și Langford, Appendix II, ed. a II-a, 1959, p. 493.

urmează că aceasta va avea matricea (unde valorile lui p sînt trecute în rîndul din stînga):

$\prec$	1	2	3	4
1	1	4	4	4
2	1	1	4	4
3	1	4	1	4
4	1	1	1	1

Toate postulatele sistemului 5 (*4.12) sînt, calculate pe baza acestor matrice, niște tautologii, după cum ușor se poate verifica făcînd calculele. Operațiile de substituție și *modus ponens* transformă tautologiile în formule, care sînt, de asemenea, tautologii (pentru *modus ponens* aceasta rezultă din faptul că matricea implicației stricte are aceeași proprietate cu cea a implicației materiale, a implicației intuiționiste, a celei łukasiewicziene etc.; anume, $1 \prec q$ ia valoarea 1 dacă și numai dacă $q = 1$). În sistemele lui Lewis însă mai utilizăm și o altă regulă de deducție, adjuncția. Privind matricea de adevăr a produsului, observăm că dacă $p = 1$ și $q = 1$ atunci $pq = 1$. Așadar, prin adjuncția a două tautologii obținem tot o tautologie.

Rezultă de aici că toate teoremele din logica lui Lewis (sistemele S1—S5) sînt astfel de tautologii. De unde rezultă imediat consistența, în toate cele trei sensuri, pentru aceste sisteme.

Un rol esențial în toate aceste demonstrații îl joacă, după cum bine se poate vedea, un anumit mod de *interpretare* a formulelor unui sistem drept tautologii față de niște matrice prin care sînt definite conectivele logice. Noi construim, cu alte cuvinte, un model pentru sistemul formal[7]. Acesta este în cazul logicii lui Whitehead și Russell un model bivalent, pentru logica lui Łukasiewicz și cea intuiționistă unul trivalent, pentru cea a lui Lewis unul tetravalent, iar în cazul logicii probabilităților chiar unul cu o infinitate de valori. Dat fiind un astfel de model, pentru sistemul formal respectiv se poate pune o problemă foarte importantă: sînt toate tautologiile modelului demon-

[7] Vedeți *2.4.

strabile în sistem sau nu? În caz afirmativ, spunem că sistemul este, în raport cu modelul respectiv, *complet*. Nu toate sistemele de mai sus sînt complete față de modelele cu care le-am pus în legătură. De pildă, după cum am mai spus, cel intuiționist nu este (putem însă alege un model față de care și el să fie complet). Nu este însă scopul nostru aici de a intra în studiul acestui gen de probleme.

* 9.3. Aplicarea logicilor polivalente în matematică

După cum observă Mostowski, „singura logică, diferită de logica clasică, de care se servește efectiv un grup, de altfel restrîns, de matematicieni, este, se pare, logica intuiționistă"[8].

Într-adevăr, izvorîtă din studiul matematicilor și dezvoltată mai ales în acest scop, logica intuiționistă se află indestructibil legată de ele. De altfel, aproape toți cei care au fundamentat-o și dezvoltat-o — Brouwer, Heyting etc. — au fost în primul rînd matematicieni. În această privință Heyting se pronunță categoric: „Logica (intuiționistă) tratează numai despre propoziții matematice; problema dacă mai admite și alte aplicații în afara matematicilor nu ne preocupă aici"[9].

Scopul intuiționiștilor este acela de a explora pînă la capăt posibilitățile raționamentului matematic intuitiv. Însă, așa cum formalismul are nevoie de o bază intuitivă, oricît de strîmtă ar fi ea, intuiționismul nu se poate lipsi de metodele formale[10]. Această conlucrare dintre logica intuiționistă și matematica intuiționistă a dus la obținerea unor rezultate dintre cele mai interesante. Unul din cele

---

[8] *L'oeuvre scientifique de J. Łukasiewicz dans le domaine de la logique mathematique*, în „Fundamenta Mathematicae", 44 (1957), pp. 1—5.

[9] **A. Heyting,** *Intuitionism*, p. 97.

[10] **A. Heyting,** *Logique et intuitionnisme*, în „Applications scientifiques de la logique mathematique" (Actes du 2e Colloque international de logique mathematique) Paris-Louvain,1954.

mai importante îl constituie dezvoltarea la maximum, pentru nevoile demonstraţiilor în matematica intuiţionistă, a teoriei funcţiilor recursive.

Astfel, încercînd să reconstruiască în stil intuiţionist edificiul matematicilor studiate cu logica clasică, s-au dezvoltat o serie de ramuri ale acestora ca aritmetica intuiţionistă, algebra intuiţionistă, analiza matematică intuiţionistă etc.[11]. Deşi lipsită în acest fel de o serie de rezultate importante, matematica intuiţionistă nu trebuie considerată doar ca o sărăcire a celei fundate pe principiul terţiului exclus. Dimpotrivă, analiza minuţioasă a raţionamentelor acesteia din urmă întreprinsă de intuiţionişti a permis degajarea unor noi noţiuni şi subtilităţi neînţelese pînă atunci. O serie dintre noţiunile clasice au fost modificate cu această ocazie corespunzător cerinţelor intuiţioniste.

Vom da un exemplu. O teoremă de analiză afirmă că *orice şir monoton şi mărginit de numere reale este convergent.* Replica sa intuiţionistă este: *orice şir monoton şi negativ, mărginit de numere reale, este neoscilant,* unde prin faptul că şirul $\{a_n\}$ de numere reale este *negativ mărginit* vom înţelege că el îndeplineşte condiţia

$$\neg\neg\,(\exists p)\;(\forall n)\;(a_n < p), \tag{1}$$

iar prin faptul că este *neoscilant,* că îndeplineşte condiţia

$$(k)\;\neg\neg\,(\exists n)\;(\forall r)\;(|a_{n+r} - a_n| < 2^{-k}) \tag{2}$$

obţinută prin inserarea unei negaţii duble în criteriul general de convergenţă al lui Cauchy. Aplicînd de mai multe ori teorema

$$\neg\,(\exists x)\,\varphi x \longleftrightarrow (\forall x)\,\neg\,\varphi x\,^{12},$$

observăm că e suficient să demonstrăm (în locul condiţiei (2))

$$\neg\,(\exists k)\;(\forall n)\;\neg\neg\,(\exists r)\;(a_{n+r} - a_n > 2^{-k-1}) \tag{3}$$

---

[11] Menţionăm doar contribuţiile de seamă pe care le-au adus în acest domeniu **Freudenthal** (în topologie), **Van Dantzig** şi **Van Rootselaar** (în teoria funcţiilor de variabilă reală), **De Roor, Weyl** şi **Van der Corput** (în algebră). O introducere în acest sens este lucrarea lui **A. Heyting,** *Intuitionism. An Introduction.* De asemenea, menţionăm ca foarte importantă **S. C. Kleene & R. E. Vesley,** *The Foundations of intuitionistic mathematics, especially in relation to recursive functions,* Amsterdam, North-Holland Publ. Co, 1965.

[12] Ea rezultă direct din teoremele *T*4 şi *T*5*a*, *6.9.

Prin urmare va trebui ca, pornind de la ipotezele (1) și

$$(\exists k)\ (\forall n)\ \neg\neg\ (\exists r)\ (a_{n+r} - a_n > 2^{-k-1}) \tag{4}$$

să ajungem la o contradicție[13].

Fie k_1 un număr astfel încît

$$(\forall n)\ \neg\neg\ (\exists r)\ (a_{n+r} - a_n > 2^{-k_1-1} \tag{5}$$

Fie q un număr oarecare. Să punem $\left[\frac{q - a_1}{2^{-k_1-1}}\right] + 1 = N$.

Ca un caz particular a lui (5) are loc

$$\neg\neg\ (\exists r)\ (a_r - a_1 > 2^{-k_1-1}) \tag{6}$$

Să presupunem că am fi găsit r_1 astfel ca

$$a_{r_1} - a_1 > 2^{-k_1-1} \tag{7}$$

Atunci, conform (5),

$$\neg\neg\ (\exists s)\ (a_{r_1+s} - a_{r_1} > 2^{-k_1-1})$$

sau, conform (6),

$$\neg\neg\ (\exists t)\ (a_t - a_1 > 2.\ 2^{-k_1-1})$$

Am demonstrat, așadar,

$$(\exists r)\ (a_r - a_1 > 2^{-k_1-1}) \to \neg\neg\ (\exists t)(a_t - a_1 > 2.2^{-k_1-1}) \tag{7}$$

Atunci, logica ne permite să conchidem din (6) și (7) că

$$\neg\neg\ (\exists t)\ (a_t - a_1 > 2.2^{-k_1-1})$$ [14]

Aplicînd de N ori acest raționament, vom avea:

$$\neg\neg\ (\exists u)\ (a_u - a_1) > N.\ 2^{-k_1-1}$$

deci

$$\neg\neg\ (\exists u)\ (a_u > q)$$

---

[13] Căci atunci, în baza tezei 4.52 $\vdash \neg\ (p \wedge q) \to .p \to \neg\ q$, rezultă exact implicația din teorema noastră.

[14] Aceasta revine la a arăta că din $\neg\neg\ p$ și $p \to \neg\neg\ q$ putem conchide $\neg\neg\ q$. Într-adevăr din $p \to \neg\neg\ q$, aplicînd de două ori contrapoziția (4.2) și principiul triplei negații (4.32), căpătăm $\neg\neg\ p \to \neg\neg\ q$. Deci aplicînd *modus ponens* față de premisa $\neg\neg\ p$, rezultă $\neg\neg\ q$.

Astfel pornind de la (4) am demonstrat

$$(\forall p) \neg \neg (\exists \iota) (a_u > p).$$

Deci:

$$\neg (\exists p) (\forall u) \neg (a_u > p),$$

în timp ce (1) dă

$$\neg \neg (\exists p) (\forall u) \neg (a_u > p).$$

Am obţinut contradicţia căutată.

* 9.4. Aplicaţiile logicilor polivalente în mecanica cuantică

Matematizarea într-un grad din ce în ce mai înalt a fizicii a avut, pe lîngă alte consecinţe, ordonarea materialului faptic şi teoretic sub forma unor structuri din ce în ce mai abstracte. S-a ajuns astfel la posibilitatea prezentării unor teorii fizice ca sisteme formale. Procesul complex prin care se constituie o teorie fizică trece, după J. L. Destouches, prin următoarele trei etape:

1) sinteza inductivă;
2) axiomatizarea;
3) partea deductivă[15].

Logica, explicitată în cadrul axiomelor şi a regulilor de raţionament admise, are un rol important în această construcţie. Definirea raportului dintre partea de logică şi cea de pură matematică ori de fizică este marcată de două puncte de vedere. Mai întîi s-a crezut că este suficient, pentru a formaliza o ştiinţă, să se adauge la axiomele logicii bivalente axiome care să definească proprietăţi fizice considerate în sistem. De pe această poziţie, Gonseth declara că „tezele logicii sînt pure tautologii", ele neputînd exprima proprietăţi fizice, şi că deci logica este „fizica obiectului oarecare".

[15] **J. L. Destouches**, *Essai sur la forme générale des théories physiques*, Cluj, 1938, p. 3.

Dezvoltarea mecanicii cuantice și formalizarea sa au lămurit că unui domeniu al realității o logică îi poate fi sau nu adecvată și că, „dacă regulile logice ale unui sistem formal sînt altele decît cele ale logicii bivalente, ele pot traduce anumite proprietăți fizice..., care pînă acum păreau că nu pot fi enunțate decît prin postulate nelogice"[16]. Se arată că logica bivalentă convine mecanicii clasice. Mai precis, propozițiile experimentale din mecanica clasică se supun unui calcul bivalent.

Argumentul se bazează pe faptul că starea sistemului mecanic la un moment dat poate fi descrisă în mecanica clasică de un punct din spațiul fazelor, adică de n parametri (n fiind numărul gradelor de libertate ale sistemului). Experiența nu ne poate da cu o precizie absolută rezultatul măsurătorilor acestor parametri, ci doar în limitele anumitor abateri Δq. Deci propozițiile experimentale sînt de forma:

„parametrul q se află în intervalul $q_0 \pm \Delta q$".

Lor nu le corespunde în spațiul fazelor un punct, ci o mulțime de puncte, și anume ele trebuie reprezentate, după părerea lui Birkhoff și von Neumann, prin mulțimile de puncte *măsurabile Lebesgue*; iar dacă diferă printr-o mulțime de măsură nulă, trebuie identificate[17]. Aceste mulțimi formează un corp de părți (clanul borelian) care, după teorema lui Stone, este izomorf cu o algebră Boole — structura algebrică a logicii clasice. Rezultă că propozițiile experimentale din mecanica clasică urmează regulile din calculul bivalent.

Toate acestea nu mai sînt valabile în mecanica cuantică. S-a încercat și în acest caz găsirea unei corespondențe între propozițiile experimentale și anumite submulțimi din spațiul fazelor. Concluzia este că propozițiile astfel interpretate nu mai satisfac toate principiile logicii clasice. De exemplu, ele nu mai satisfac legile distributivității:

$$p \,.\, q \vee r \,.\, = :\, p \,.\, q \,.\vee.\, p \,.\, r$$

$$p.\vee.\, q \,.\, r \,.\, = \,.\, p \vee q \,.\, p \vee r^{18}$$

---

[16] **R. Feys**, *Problema aplicațiilor logicii formalizate*, în *Materialismul dialectic și științele moderne*, vol. XIII, București, 1970.

[17] **G. Birkhoff** și **J. von Neumann**, *The Logic of Quantum Mechanics*, în „Annals of Mathematics", XXXVII (1936), pp. 823—843.

[18] Tezele 4.4 și respectiv 4.41 din •3.7.

Z. Zawirski a observat pentru prima dată că mecanica cuantică nu poate fi interpretată în cadrul logicii clasice[19]. Pentru a explica fenomenele în cadrul acestei științe trebuie să apelăm la mai multe imagini, care, deși se exclud, se întregesc reciproc; se pare că aceasta ar fi singura cale. După cum se știe, studiul elementelor microfizice se poate face pe două căi: prin teoria corpusculară sau prin cea ondulatorie. Paralelismul dintre interpretarea ondulatorie și cea corpusculară, ambele necesare, conduce, după Zawirski, la concluzia că realitatea fizică se traduce în două propoziții contradictorii. În logica bivalentă există însă o teoremă după care o propoziție din care se deduc două propoziții contradictorii este falsă:

$$[p \supset (q \equiv \sim q)] \supset \sim p$$

Prin urmare mecanica cuantică, în care se deduce că electronul este corpuscul și nu este corpuscul (este undă) este falsă. În logica trivalentă a lui Łukasiewicz însă (cap. 5) formula de mai sus nu este adevărată. De aceea, pentru a ocoli o asemenea situație, Zawirski propune interpretarea mecanicii cuantice cu logica lui Łukasiewicz[20].

Dintre cei care au căutat, de asemenea, să dea o interpretare a mecanicii cuantice cu ajutorul logicilor trivalente au fost H. Reichenbach și P. Février. Vom urmări în continuare, ceva mai amănunțit, încercările lor.

* 9.4.1. Logicile polivalente construite de Paulette Février

P. Février a încercat, bazîndu-se pe o serie de rezultate care puneau în lumină diferențele dintre vechea mecanică și cea cuantică, fundarea unor logici plecînd de la con-

[19] **Z. Zawirski**, *Über die Anwendung der Mehrwertigen Logik in der empirischen Wissenschaft*, în *Das Kausalproblem*, II („Internationaler Kongress für Einheit der Wissenschaft", Kopenhagen, 1936).

[20] *Ibidem*, p. 431.

siderarea valorilor de adevăr ale propozițiilor[21]. Cum vom vedea, aceste logici sînt obligate să introducă pentru unele propoziții experimentale noi valori de adevăr, în afara „adevărului" și „falsului" (terțiul, falsul absolut etc.).

Trecînd de la fenomenele la scară obișnuită, unde apariția și dispariția obiectelor sînt legate esențial de cauze necesare, la lumea fizicii atomice, constatăm fenomene în decursul cărora se creează și se anihilează particule; astfel, celor două stări, „existența" și „non-existența", li se adaugă o a treia, „starea zero", care exprimă „posibilitatea trecerii la existență"[22]. Prin urmare, un enunț despre existența unui corpuscul poate lua trei valori de adevăr: adevărul, falsul și terțiul (corespunzînd stadiului zero de existență a unei particule). P. Février ia în discuție logica unor astfel de propoziții, pe care o arată a fi o logică trivalentă L_{3E}, avînd aceleași legi ca și logica trivalentă a lui Łukasiewicz.

Mecanica cuantică, așa cum o considerau Bohr și Sommerfeld, diferă de mecanica clasică prin faptul că pe lîngă „legăturile" obișnuite impuse sistemului (rotație liberă în jurul unui ax etc.) apar și așa-numitele *condiții de cuantificare*. Acestea se prezintă ca niște restricții *apriori* impuse rezultatelor măsurătorilor și deci propozițiilor experimentale. O propoziție care nu respectă condițiile de cuantificare nu este adevărată, dar nici falsă (falsul desemnînd o propoziție care ar putea fi adevărată dar care nu este), ci *absolut falsă*. Aceasta este de fapt o a treia valoare de adevăr *A*. Logica trivalentă L_{3Q} pe care o obține astfel P. Février are aceleași matrice cu o altă logică — „logica complementarității" — , de care ne vom ocupa în cele ce urmează.

Savantul german W. Heisenberg a stabilit că nu se pot cunoaște exact, simultan, poziția și viteza — mai exact cantitatea de mișcare — care animă un corpuscul (în cazul

---

[21] **P. Février** și-a expus pentru prima oară ideile în 1936 (comunicarea a fost publicată în „Travaux du IX-e Congrès int. de philosophie", VI, pp. 88—94, Paris, 1937). Noi vom urmări lucrarea sa *La structure des théories physiques*, Paris, 1951, în care se găsește dezvoltată pe larg concepția ei.

[22] **P. Février**, *La structure des théories physiques*, p. 5.

cînd plecăm de la concepţia corpusculară). Fie q coordonata care determină poziţia corpusculului şi p cantitatea sa de mişcare (masa × viteza). Ambele se determină cu anumite erori. Fie aceste erori: Δq pentru poziţie şi Δp pentru cantitatea de mişcare. Heisenberg arată că ele nu sînt independente în mecanica cuantică, ci invers proporţionale: cu cît una se micşorează, cealaltă creşte. Are loc aşa-numita relaţie de incertitudine

$$\Delta p \cdot \Delta q \geqslant h$$

care arată că cele două imprecizii sînt canonic conjugate şi că în nici un caz produsul lor nu poate fi mai mic decît constanta h a lui Planck[23].

Reiese că două propoziţii experimentale despre determinarea poziţiei şi cantităţii de mişcare ale uneia şi aceleiaşi particule la un moment dat:

„p ia valoarea $p_0 \pm \Delta p$"

„q ia valoarea $q_0 \pm \Delta q$"

nu pot fi adevărate ori false simultan dacă $\Delta p \, \Delta q < h$. Sîntem atunci conduşi la aranjarea perechilor de propoziţii în două clase:

— clasa *perechilor compozabile*, pentru care putem utiliza produsul şi suma logică în condiţiile obişnuite, şi

— clasa *perechilor incompozabile*, pentru care nu putem afirma niciodată produsul logic.

Avem de ales între a declara că nu li se poate aplica conjuncţia şi a prelungi domeniul de aplicabilitate al acestei operaţii, dîndu-i o semnificaţie chiar şi în astfel de cazuri. P. Février alege ultima cale.

Astfel, în cazul a două propoziţii incompozabile, produsul logic este declarat, nu fals, ci *absolut fals*, logica pe care o construieşte avînd trei valori: adevărul, notat V (de la francezul *„vérité"*), falsul F (de la *„fausseté"*) şi falsul

---

[23] **W. Heisenberg**, *Die Physikalischen Prinzipien der Quanten theorie*, Stuttgart, 1930 (trad. românească, Bucureşti, ed. ştiinţifică 1969; citatele le vom face după ea).

absolut A[24]. Produsul logic va fi definit în două cazuri: cînd propozițiile care îl compun sînt „compozabile" și cînd sînt „incompozabile". P. Février îl notează cu simbolul „&".

În cazul a două propoziții p, q, compozabile, ca și în logica clasică, $p\&q$ va fi adevărat dacă ambele propoziții sînt adevărate, iar dacă una ia valoarea A, produsul va lua, de asemenea, valoarea A. Astfel încît produsul propozițiilor compozabile este dat de matricea

&	V	F	A
V	V	F	A
F	F	F	A
A	A	A	A

În cazul propozițiilor incompozabile, dacă una are valoarea V sau F, este pentru că s-a efectuat o măsură și deci valoarea celeilalte nu mai poate fi determinată, a doua măsură neputîndu-se efectua în același moment; aceasta conduce la faptul că produsul este A. Dacă una dintre propoziții are valoarea A, produsul este, de asemenea, A. Rezultă că produsul a două propoziții incompozabile va avea matricea

&	V	F	A
V	A	A	A
F	A	A	A
A	A	A	A

Suma logică, fără excluziune (disjuncția), a două propoziții p, q, notată cu $p \vee q$, este adevărată în logica clasică dacă cel puțin una dintre propoziții este adevărată. În plus, în logica complementarității, cînd propozițiile sînt compozabile și una ia valoarea A, suma ia aceeași valoare.

[24] „A" nu trebuie confundat cu identic falsul (negația unei tautologii).

Deci

$\vee$	V	F	A
V	V	V	V
F	V	F	F
A	V	F	A,

cînd perechile sînt compozabile și

$\vee$	V	F	A
V	A	V	V
F	V	A	F
A	V	F	A,

cînd perechile sînt incompozabile.

* 9.4.2. Logica mecanicii cuantice a lui Hans Reichenbach

Pornind ca și P. Février de la o analiză foarte amănunțită a mecanicii cuantice, Reichenbach găsește și el justificabilă ideea utilizării în acest caz a unei logici cu trei valori[25]. Vom urmări în cele ce urmează concluziile lui.

Reichenbach pleacă de la afirmațiile făcute de către unii fizicieni contemporani în legătură cu interpretările experimentelor din mecanica cuantică.

Bohr și Heisenberg propuseseră să se declare o serie de enunțuri aparținînd mecanicii cuantice drept propoziții lipsite de sens. Aceasta pentru a putea evita anumite situații care apar și care se abat de la concepția clasică a determinismului (Heisenberg le numește *anomalii cauzale)*.

La discuția oricăror experiențe, scrie W. Heisenberg, trebuie să se ia în considerare în special interacțiunea dintre obiect și observator, care este *a fortiori* legată de orice observare. În teoria clasică această interacțiune a

[25] Expunerea completă a ideilor sale a fost făcută în lucrarea *Philosophical Foundations of Quantum Mechanics*, Berkeley-Los Angeles, 1944.

fost considerată sau neglijabil de mică, sau controlabilă, astfel încît influența ei să poată fi eliminată ulterior prin calcul.

În fizica atomică însă nu se poate face o astfel de presupunere, deoarece, din cauza discontinuităților în domeniul atomic, fiecare interacțiune poate provoca schimbări relativ mari, parțial necontrolabile[26].

Precizia cu care pot fi determinate în experiență anumite mărimi nu poate depăși astfel limita fixată lor, după cum am văzut, de relațiile de incertitudine. Heisenberg vede în ele tocmai gradul de libertate față de noțiunile clasice, care este necesar pentru descrierea fără contradicții a proceselor atomice.

Aceste relații dau limitele pînă la care pot fi aplicate noțiunile teoriei corpusculare. O folosire mai precisă a cuvintelor „poziție", „viteză", care depășește relațiile de incertitudine, este tot atît de lipsită de conținut ca folosirea unor cuvinte al căror sens nu a fost definit[27].

H. Reichenbach consideră însă că nu este necesară eliminarea acestor enunțuri fizice din domeniul enunțurilor cu sens pentru a avea o teorie fără anomalii cauzale; este suficient să facem doar precizarea, că ele nu trebuie considerate nici ca adevărate, nici ca false. Logicianul german ajunge astfel la introducerea celei de-a treia valori de adevăr pe care o numește *nedeterminarea (Unbestimmtheit)*, notată cu *U*, și a cărei semnificație o distinge de ceea ce el înțelege prin „necunoscut" *(unbekannt)*[28].

Reichenbach ajunge să deosebească două tipuri de enunțuri, și anume:

enunțuri cu caracter observațional; de pildă, „contorul Geiger s-a oprit la indicația *n*" sau „linia neagră de pe un film fotografic măsoară atîția milimetri" etc.; ele formează așa-numita „limbă a observației" *(Beobachtungssprache)*;

---

[26] **W. Heisenberg**, *op. cit.*, p. 8.

[27] *Ibidem*, p. 19.

[28] „Necunoscutul" poate fi aplicat și propozițiilor dintr-un calcul bivalent atunci cînd valoarea de adevăr a unei asemenea propoziții nu ne este cunoscută.

enunțuri cu caracer teoretic, ca: „electronul are impulsul p". Acestea din urmă sînt încadrate de Reichenbach în așa-numitul „limbaj mecanico-cuantic" *(quantenmechanische Sprache)*.

Pentru a reprezenta comparativ soluția obținută de el, prin introducerea celei de-a treia valori de adevăr U, cu soluția dată de Heisenberg, să considerăm următoarele două enunțuri din „limba observației":

„s-a făcut o măsurare fizică u" simbolizat prin „m_u" și „instrumentul de măsură arată valoarea u" simbolizat prin „u".

Ele nu pot lua decît două valori de adevăr: adevărul, notat de Reichenbach cu W (de la germanul *„Wahrheit")*, și falsul, notat cu F (de la *„Falschheit")*.

Fie atunci următorul enunț din limbajul mecanico-cuantic „valoarea mărimii, imediat după măsurare, este u" notat cu S. Valoarea sa de adevăr depinde de adevărul enunțurilor m_u și u, așa cum ilustrează și tabelul următor.

Limba observației cu două valori de adevăr		Limba mecanicii cuantice cu trei valori de adevăr	
		După Heisenberg	După Reichenbach
m_u	u	S	S
W	W	W	W
W	F	F	F
F	W	fără sens	U
F	F	fără sens	U

În acest tabel în coloana corespunzătoare fiecărui enunț a fost trecută valoarea sa de adevăr. Coloana a treia a fost introdusă de Reichenbach pentru a arăta că, în cele două cazuri cînd S ia valoarea U, Heisenberg declară acest enunț *fără sens*.

Considerînd prin urmare trei valori de adevăr pentru propoziții, Reichenbach se vede nevoit să introducă și mai multe negații:

Negația ciclică notată cu simbolul $\sim$ și cu care ne-am mai întîlnit în capitolul trecut (*8.6), matricea sa de adevăr, după cum am văzut, fiind:

A	$\sim A$
W	U
U	F
F	W

Negația numită de Reichenbach „diametrală" și notată cu semnul minus „—", avînd matricea[29]:

A	$-A$
W	F
U	U
F	W

Negația „completă", notată printr-o bară pusă deasupra căreia matrice este:

A	$\bar{A}$
W	U
U	W
F	W

Rolul acestor negații este, în logica dezvoltată de Reichenbach, deosebit de important. Limba care vorbește despre enunțurile mecanicii cuantice sau, așa cum i-am mai spus, metalimba[30], conține enunțuri de forma „A are valoarea de adevăr X" și care nu pot fi decît adevărate sau false. Reichenbach consideră că valorile de adevăr

[29] După cum se poate observa, ea este identică cu negația trivalentă N, definită de Łukasiewicz (*5.7).

[30] Vedeți *2.4.

sînt astfel definite încît nu putem aserta decît că un enunț are valoarea *W*. Pentru a exprima faptul că are altă valoare de adevăr, facem apel la negații. Și anume aserțiunea

$$\sim \sim A$$

va fi echivalentă cu aserțiunea că enunțul *A* este nedeterminat, iar aserțiunea

$$\sim A$$

sau aserțiunea

$$- A$$

va fi echivalentă cu „*A* este fals"[31].

Logica mecanicii cuantice se dezvoltă definind disjuncția, conjuncția și o serie de implicații și echivalențe numite de Reichenbach: implicație standard, alternativă, cvasiimplicație și echivalență standard și alternativă. Întrucît nu vom intra în detalii, este suficient, pentru considerațiile ce le vom face, a menționa doar matricele de adevăr pentru disjuncție și implicația alternativă (notată printr-o săgeată). Acestea sînt

A	B	$A \vee B$	$A \rightarrow B$
W	*W*	*W*	*W*
W	*U*	*W*	*F*
W	*F*	*W*	*F*
U	*W*	*W*	*W*
U	*U*	*U*	*W*
U	*F*	*U*	*W*
F	*W*	*W*	*W*
F	*U*	*U*	*W*
F	*F*	*F*	*W*

Cu ajutorul acestor două conective, precum și al negației ciclice $\sim$, Reichenbach crede că poate exprima în logica

[31] Procedeul utilizării negației pentru a face din aserțiunea adevărului unui enunț aserțiunea faptului că un alt enunț ia o anumită valoare de adevăr a mai fost utilizat de Reichenbach, după cum s-a putut vedea, și în logica probabilităților (*8.6).

sa „complementaritatea" a două propoziții, și anume: două propoziții, A și B, vor fi *complementare* dacă între ele subzistă relația

$$(A \vee \sim A) \rightarrow \sim \sim B;$$

adică, din faptul că A este adevărat sau fals rezultă $\sim \sim B$. Ce îl face însă pe Reichenbach să numească o asemenea relație „complementaritate"?

„...Descrierea obișnuită a naturii și în special ideea că toate evenimentele în natură decurg după anumite legi exacte — scrie Heisenberg — se bazează pe presupunerea că este posibil să se observe fenomene fără a le influența sensibil. A atribui unui anumit efect o anumită cauză are sens numai atunci cînd efectul și cauza pot fi observate fără să se intervină simultan, perturbînd evenimentul. Legea cauzalității în forma ei clasică poate fi definită deci, conform caracterului ei, numai pentru sisteme închise. În fizica atomică, în general, de fiecare observare se leagă însă o perturbare finită, pînă la un anumit grad necontrolabilă, după cum era de altfel de așteptat, în principiu, în fizica celor mai mici unități posibile. Deoarece, pe de altă parte, fiecare descriere spațio-temporală a unui eveniment fizic este condiționată de observarea evenimentului, rezultă că descrierea spațio-temporală a unor evenimente, pe de o parte, și legea clasică a cauzalității, pe de altă parte, sînt trăsături complementare ale fenomenelor fizice, care se exclud reciproc[32].

Cele două aspecte ale electronului și celorlalte microobiecte: ca particule (teoria corpusculară) și ca unde (teoria ondulatorie) sînt complementare. Ele se întregesc reciproc (la explicarea unui fenomen din mecanica cuantică avem nevoie de ambele descrieri). Dar nu putem niciodată combina cele două concepte în cadrul aceleiași descrieri. Principiul acesta a fost formulat pentru prima dată de Bohr, sub numele de *principiul complementarității*.

Și acum să ne întoarcem la formula dată de Reichenbach

$$(A \vee \sim A) \rightarrow \sim \sim B$$

[32] **W. Heisenberg,** *op. cit.*, p. 59.

Ea spune că dacă A este un enunț adevărat sau fals, atunci enunțul B este nedeterminat (căci $\sim \sim B$ am văzut ceva mai înainte că înseamnă exact „enunțul B ia valoarea U"). Dar același lucru se petrece cu două enunțuri complementare: unul „corpuscular", celălalt „ondulatoriu". Dacă unul are sens (este adevărat sau fals), celălalt este fără sens sau, în logica lui Reichenbach, cu valoarea de adevăr U. Poziția simetrică a acestor enunțuri se traduce astfel, din punct de vedere formal, printr-o simetrie a relației de care am vorbit. Într-adevăr, ea poate fi pusă sub forma

$$\overline{\sim \sim A} \rightarrow \sim \sim B,$$

care arată că A și B ocupă poziții simetrice.

Mai mult, Reichenbach ajunge la un analog formal al principiului de complementaritate formulat de Bohr. Nu putem însă da deducerea acestei formule, căci ar însemna o dezvoltare a formalismului său peste limitele pe care ni le-am propus aici.

Este interesant de urmărit în continuare modul formal în care se caracterizează, în logica trivalentă de care ne ocupăm, propozițiile mecanicii cuantice. După cum se știe, formulele logicii bivalente pot fi împărțite din punct de vedere formal în: tautologii, contradicții și formule care nu sînt tautologii, dar iau cel puțin o dată valoarea „adevărat". Pe acestea din urmă Reichenbach le numește *sintetice* și, după părerea sa, ele sînt singurele a căror asertare exprimă un conținut. În logica trivalentă clasa propozițiilor sintetice poate fi subîmpărțită la rîndul ei în:

— propoziții *complet sintetice*, cele care pot lua toate valorile de adevăr;

— propoziții *simplu sintetice*, cele care pot lua doar valorile W și F;

— propoziții *semisintetice*, cele care pot lua doar valorile W și U.

Interesant este faptul că, așa cum arată Reichenbach, toate propozițiile mecanicii cuantice nu pot lua decît

valorile W și F (sînt simplu sintetice). Cu alte cuvinte, deși le „judecăm" într-o logică trivalentă, ele au un caracter bivalent.

*
* *

Am urmărit, pînă aici, mai multe încercări de a construi un fundament logic, altul decît cel clasic, pentru mecanica cuantică, cu scopul de a elimina „ciudățeniile" ce apar în interiorul ei (anomalii cauzale, propoziții incompozabile etc.). Nu trebuie să credem că cercetările s-au redus la atît. Este suficient să citățm doar pe cele ale lui H. Margenau și H. Putnam, ca și discuțiile purtate în contradictoriu pe această temă[33].

Toate aceste încercări — cu excepția celei a lui Birkhoff și von Neumann — au în fond la bază o idee comună: introducerea unei a treia valori de adevăr (posibilitatea trecerii la existență, falsul absolut, nedeterminatul) cu care sînt creditate enunțurile care, altfel, ar trebui considerate ca lipsite de sens. Numai că în unele din ele, cum este logica L_{3E} construită de P. Février, această valoare are o semnificație ontologică, pe cînd în altele, ca L_{3Q}, ea capătă un caracter epistemologic, pierzîndu-și caracterul ontologic.

Rămîne să vedem care ar fi avantajele și rațiunile de a fi ale unui asemenea tratament, pentru care au optat o parte din logicieni. Reichenbach le rezumă la două mai importante:

— perturbarea obiectului prin instrumentul de observare (microscop, camera Wilson etc.) nu oferă în sine rațiunea suficientă pentru a renunța la enunțuri privind obiectele neobservate;

— folosind regulile de extindere ale limbajului, se poate întotdeauna extinde limba observațiilor astfel încît să includă și obiectele neobservate.

---

[33] **H. Margenau**, *The Nature of Physical Reality*, New York, 1950; **H. Putnam**, *Three-Valued Logic*, în „Philosophical Studies", 8 (1957), pp. 73—80. Discuții asupra logicii trivalente a lui Reichenbach au fost purtate, printre alții, de E. Nagel (1946) și P. Feyerabend (1958).

Se pune însă problema dacă această extindere satisface un principiu de continuitate: obiectele neobservate introduse în acest fel să urmeze aceleași reguli ca și obiectele observate. Spre deosebire de mecanica clasică, în cea cuantică răspunsul este negativ, oricum am alege extinderea respectivă. Legile guvernînd obiectele neobservate includ anomalii cauzale. Introducînd o logică cu trei valori, se poate atribui valoarea „nedeterminat" enunțurilor privind obiectele neobservate și astfel elimina anomaliile cauzale dintre enunțurile afirmative[34].

* 9.5. Logicile polivalente și paradoxele logice

După cum am arătat, sistemele logice s-au lovit de timpuriu de paradoxe. Cum această situație era incompatibilă cu dezvoltarea ulterioară a acestor sisteme, Russell și alții au încercat să le elimine, recurgînd la diverse restricții mai mult sau mai puțin naturale (spre exemplu teoria tipurilor)[35], restricții avînd drept scop să facă imposibilă construirea unor propoziții de tip paradoxal.

Alții însă au tras concluzia că însăși universalitatea logicii bivalente și, mai precis, a principiului terțiului exclus iese de aici atinsă. Aceasta era, după cum am văzut, părerea lui Brouwer și a școlii intuiționiste. Alături de ei putem menționa pe Church și alți logicieni importanți.

Logicianul sovietic D. A. Bocivar și-a propus, în 1938[36],

---

[34] **H. Reichenbach,** *Les fondaments logiques de la théorie des quanta: Utilisation d'une logique a trois valeurs,* în „Applications sciéntifiques de la logique mathématique" (Actes du 2e coll. Int. de Logique Mathématique, Paris, 1952, Paris, 1954, pp. 103—114). Soluția respectivă este supusă criticii în literatura filozofică marxistă.

[35] Vedeți *3.13.

[36] **D. A. Bocivar,** *Asupra unui calcul trivalent și aplicațiile lui la analiza paradoxurilor calculului funcțional extins clasic,* în „Matematiceskii Sbornik", t. 4 (46), nr. 2, 1938, pp. 257—308. (Traducerea românească a acestui articol se găsește în „Analele româno-sovietice", seria matematică-fizică, anul XV, nr. 2 (37) pp. 200—222. Citatele le vom face după această traducere.) Rezul-

să analizeze în cadrul unui sistem formal, construit în acest scop, asemenea propoziţii cu caracter paradoxal, prin metoda demonstraţiei formale a absurdităţii lor.

Pentru aceasta Bocivar face distincţie între *enunţ* şi *propoziţie*. Enunţul are un caracter mai general şi poate fi chiar fără sens, pe cînd propoziţia este un caz particular de enunţ, şi anume cel în care acesta are sens. Prin urmare enunţurile pot lua trei valori de adevăr: adevărul (R), falsul (F) şi non-sensul (S), pe cînd propoziţiile numai două: adevărul şi falsul.

Bocivar distinge apoi două forme de afirmaţie, două forme de negaţie, două forme de conjuncţie etc. Spre exemplu, un enunţ A poate fi afirmat sub forma simplă „A", identică cu însuşi enunţul; o astfel de formă este numită de Bocivar *interioară*[37]. Sau poate fi afirmat sub forma numită *exterioară*, şi anume „A este adevărat". La fel, negaţia, conjuncţia, disjuncţia, implicaţia au cîte o formă interioară şi alta exterioară. În plus, printre formele exterioare mai trebuie să trecem şi „A este fără sens", fără corespondentă interioară. Deosebirea principală dintre aceste forme poate fi ilustrată prin următorul exemplu: dacă A este un enunţ fără sens, forma interioară a negaţiei sale, „non-A", este, de asemenea, fără sens, pe cînd cea exterioară, „A este fals", are sens şi este falsă.

După cum observă Bocivar, în calculul bivalent cele două forme sînt aplicate simultan, ceea ce conduce la o dualitate în interpretarea posibilă a conţinutului lor.

El mai numeşte formele interioare *funcţii de conţinut clasice*, iar pe cele exterioare, *funcţii de conţinut neclasice* de enunţuri variabile.

Să notăm atunci cu a, b, c, d ... enunţurile variabile ce pot lua trei valori de adevăr: R (adevărul), F (falsitatea) şi S (non-sensul). Funcţiile clasice fundamentale vor fi: negaţia interioară $\sim a$ (non-a) şi produsul logic interior

---

tate ulterioare cu privire la studiul aceluiaşi sistem sînt publicate sub titlul *Asupra problemei necontradicţiei unui calcul trivalent*, în „Matematiceskii Sbornik", t. 12 (54), nr. 3, 1943, pp. 353—369. (Traducerea românească a apărut în „Analele româno-sovietice", seria matematică-fizică, anul XV, nr. 3 (38), pp. 35—51.)

[37] **D. A. Bocivar**, *Asupra unui calcul trivalent*, trad. rom., p. 201.

$a \cap b$ (a și b). Definiția lor se face prin următoarele matrice:

a	R	F	S
$\sim a$	F	R	S

$a \cap b$	R	F	S
R	R	F	S
F	F	F	S
S	S	S	S

Singura funcție neclasică fundamentală este afirmația exterioară $\vdash a$ (a este adevărat)[38], cu următoarea matrice de adevăr

a	R	F	S
$\vdash a$	R	F	F

Celelalte funcții clasice pot fi definite cu ajutorul celor două fundamentale astfel:
suma logică clasică sau formal interioară

$$(a \cup b) \underset{D}{=} \sim (\sim a \cap \sim b),$$

implicația clasică sau formal interioară

$$(a \supset b) \underset{D}{=} \sim (a \cap \sim b),$$

echivalența clasică sau formal interioară

$$(a \supset\subset b) \underset{D}{=} [(a \supset b) \cap (b \supset a)]$$

Cu ajutorul afirmației exterioare și a funcțiilor clasice se pot defini funcțiile neclasice sau formal exterioare:

produsul logic $(a \wedge b) \underset{D}{=} (\vdash a \cap \vdash b)$

suma logică $(a \vee b) \underset{D}{=} (\vdash a \cup \vdash b)$

implicația $(a \rightarrow b) \underset{D}{=} (\vdash a \supset \vdash b)$

concurența[39] $(a \longleftrightarrow b) \underset{D}{=} [(a \rightarrow b) \cap (b \rightarrow a)]$

---

[38] Vedeți **D. A. Bocivar**, *Asupra problemei necontradicției unui alcul trivalent*, trad. rom., p. 36.

[39] $a \longleftrightarrow b$ înseamnă că adevărul fiecăruia din cele două enunțuri implică adevărul celuilalt. Pe cînd echivalența logică $a \equiv b$ are înțelesul că cele două enunțuri au aceeași valoare de adevăr.

echivalența $(a \equiv b) \underset{D}{=} [(a \leftrightarrow b) \cap (\sim a \leftrightarrow \sim b)]$

negația $\urcorner a \underset{D}{=} \vdash \sim a$

non-sensul $\downarrow a \underset{D}{=} \sim (\vdash a \cup \urcorner a)$[40].

Calculînd pe baza acestor definiții matricele de adevăr ale tuturor funcțiilor clasice, vom observa că ele au toate aceeași proprietate pe care o au matricele negației și produsului logic clasic, și anume cînd cel puțin unul din argumente ia valoarea S (este fără sens), întreaga funcție ia aceeași valoare. Prin urmare nici o formulă clasică (care conține doar funcții clasice) nu poate fi identic adevărată (identic egală cu R). Nu poate fi deci o tautologie și teză în sistemul lui Bocivar. De pildă $a \supset\subset a$ nu este o astfel de teză.

Asemenea tautologii trebuie deci să conțină neapărat și funcții neclasice. Iată, spre exemplu, cîteva asemenea tautologii mai importante:

$$a \equiv a$$

„a este logic echivalent cu a"

$$\downarrow a \equiv \downarrow \sim a$$

„„a este fără sens" este logic echivalent cu „non-a este fără sens"»

$$a \equiv \downarrow a . \equiv \downarrow a$$

«a este echivalent cu „a este fără sens"» este echivalent cu „a este fără sens".

Verificarea faptului că sînt tautologii este imediată. De asemenea, se poate observa că printr-o substituție

---

[40] Semnele $\sim$, $\vdash$, $\urcorner$ și $\downarrow$ se aplică doar literelor sau parantezelor imediat următoare. Funcția „$\downarrow a$" poartă numele de „non-sens" deoarece, pe baza definiției sale, făcînd un calcul simplu, îi găsim următoarea matrice de adevăr

a	R	F	S
$\downarrow a$	F	F	R

care arată că $\downarrow a$ este adevărat exact atunci cînd a este fără sens (ia valoarea S).

efectuată într-o tautologie se obţine, de asemenea, o tautologie.

Nu vom mai insista în continuare asupra calculului dezvoltat de Bocivar. Funcţiile propoziţionale pot fi introduse la fel de natural ca şi în logica bivalentă (vedeţi *3.3). Trebuie să ţinem seama în permanenţă că avem un calcul restrîns, în care enunţurile sînt legate doar prin conective interne sau clasice. El este, după cum arată Bocivar, întru totul asemănător calculului cu funcţii din cap. 3 B. Dar, pentru că va trebui să deosebim funcţiile şi enunţurile sale variabile de cele ale unui calcul obţinut prin lărgirea acestuia, le vom pune indicele k.

Se observă şi aici, ca şi în calculul enunţurilor, că formulele în care intră doar conective clasice nu pot fi tautologii în raport cu matricele date de Bocivar.

Calculul acesta restrîns poate fi însă extins prin introducerea conectivelor externe, aşa cum am procedat mai înainte[41]. În acest cadru mai larg, obţinut, după cum am văzut, prin introducerea a o serie de noţiuni şi distincţii, Bocivar analizează paradoxele logice. Să urmărim şi noi una din aceste analize, şi anume aceea a paradoxului construit de Russell, expus de noi la *3.13. Despre ce era vorba? Spuneam că o proprietate ψ este *predicabilă*, notat pe scurt $Pd(\psi)$ dacă are proprietatea exprimată de ea însăşi; în caz contrar ea este impredicabilă. Aşadar, prin definiţie:

$$Pd\ (\psi) \underset{D}{=} \psi\ (\psi)^{42}$$

În logica clasică (nu cea definită de matricele lui Bocivar) se putea demonstra că „a este echivalent cu a", adică în notaţia lui Bocivar

$$a \supset\subset a$$

---

[41] Bocivar introduce şi o nouă pereche de cuantificatori neclasici, corespunzători celor clasici. Ne vom mărgini însă la strictul necesar înţelegerii demonstraţiei ce urmează.

[42] În *3.13 definisem proprietatea de impredicabilitate: *Imp* (ψ). Urmărind demonstraţia lui Bocivar, păstrăm notaţiile sale. De altfel, această diferenţă nu are, după cum se poate observa, nimic esenţial. E o simplă convenţie de notaţie.

Prin urmare

$$\psi(\psi) \supset\subset \psi(\psi)$$

sau, folosind definiția funcției *Pd*,

$$\psi(\psi) \supset\subset Pd(\psi)$$

Substituind în ultima formulă ψ cu $\sim Pd$ obținem[43]

$$\sim Pd(\sim Pd) \supset\subset Pd(\sim Pd),$$

care este contradictorie.

Transpunînd problema în sistemul lui Bocivar, vom considera în locul funcției variabile ψ analogul său clasic, funcția variabilă ψ_k și definiția proprietății *Pd* va fi:

$$Pd(\psi_k) \underset{D}{=} \psi_k(\psi_k)$$

Aici însă, spre deosebire de logica clasică, formula

$$a \supset\subset a$$

nu mai este valabilă, căci nu mai este o tautologie. În schimb este o tautologie, așa cum am menționat, formula

$$a \equiv a,$$

din care, prin substituție, obținem

$$\psi_k(\psi_k) \equiv \psi_k(\psi_k)$$

sau, utilizînd ultima definiție,

$$Pd(\psi_k) \equiv \psi_k(\psi_k),$$

în care substituind ψ_k cu $\sim Pd$ [43] rezultă

$$Pd(\sim Pd) \equiv \sim Pd(\sim Pd) \qquad (\alpha)$$

Dar am arătat că în sistemul lui Bocivar are loc tautologia

$$a \equiv \sim a \,.\equiv \downarrow a$$

deci, prin substituție,

$$Pd(\sim Pd) \equiv \sim Pd(\sim Pd) \,.\equiv \downarrow Pd(\sim Pd);$$

[43] Bocivar observă că aceste substituții sînt posibile, deoarece *Pd* aparține de fiecare dată domeniului de valori al variabilei respective (*Asupra unui calcul trivalent*, pp. 218, 219).

în virtutea lui (α)

$$\downarrow Pd\ (\sim Pd)$$

Şi, cum are loc tautologia

$$\downarrow a \equiv \downarrow \sim a,$$

rezultă şi

$$\downarrow \sim Pd\ (\sim Pd)$$

Prin urmare, ambele enunţuri, $Pd\ (\sim Pd)$ şi $\sim Pd\ (\sim Pd)$, sînt fără sens (afirmaţiile lor exterioare sînt însă false).

* * *

Logicianul chinez Moh Shaw-Kwei a demonstrat că nici sistemele polivalente nu sînt scutite de paradoxe[44], deşi au slăbit sau au eliminat complet principiul terţiului exclus. Şi anume, paradoxe de acelaşi tip cu cel al lui Russell[45] pot fi construite în calculul intuiţionist al lui Heyting, în sistemele implicaţiei stricte ale lui Lewis, în calculul minimal al lui Johansson etc. Căci proprietăţile pe care ne bazăm cînd vrem să construim asemenea paradoxe sînt îndeplinite în toate sistemele menţionate. Acestea sînt în fond legate de faptul dacă implicaţia din sistemul respectiv, pe care s-o notăm spre exemplu prin C, verifică:

— principiul identităţii:

$$Cpp,$$

— legea *modus ponens*, adică dacă p şi Cpq sînt teze, q este, de asemenea, o teză şi

— una din următoarele reguli de inferenţă:

$$\frac{CpCrq}{Cpq}$$

---

[44] **Moh Shaw-Kwei**, *Logical paradoxes for many-valued systems*, în „Journal of Symbolic Logic" XIX (1954) pp. 37—39.

[45] Vedeţi •3.13.

sau

$$\frac{CpCpCpq}{CpCpq}$$

.....

etc.

În aceste condiţii, un interes deosebit îl prezintă logicile polivalente ale lui Łukasiewicz. În L_3, spre exemplu, după cum am observat[46], implicaţia

$$CCpCpqCpq$$

nu are loc şi nici regula de inferenţă

$$\frac{CpCpq}{Cpq}$$

Are loc în schimb

$$\frac{CpCpCpq}{CpCpq}$$

şi, pe baza ei, raţionamentele dezvoltate de Moh Shaw-Kwei. În general, într-o logică L_n, din formula cu antecedent multiplicat de $n - 1$ ori,

$$\underbrace{Cp....CpCpq}$$

de $n - 1$ ori,

nu se poate conchide la cea cu antecedent multiplicat de $n - 2$ ori. În schimb, de la cea cu antecedent multiplicat de n ori se poate conchide la cea cu antecedent multiplicat de $n - 1$ ori. Ca urmare a acestui fapt, paradoxele pot fi încă construite. Rămîne să se analizeze atunci situaţia logicii cu o infinitate de valori. Dacă ea ar fi lipsită de paradoxe, ar putea constitui o bază convenabilă pentru dezvoltarea diverselor alte sisteme formale[47].

---

[46] Vedeţi *5.9.

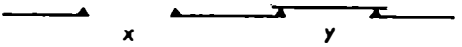
[47] Asemenea încercări au fost deja făcute în teoria axiomatică a mulţimilor. În legătură cu aceasta, a se vedea Th. Skolem, *Mengenlehre gegründet auf einer Logik mit unendlich vielen Wahr-*

✽ 9.6. Aplicarea logicilor cu mai multe valori în studiul schemelor cu contacte şi relee

C. E. Shannon şi V. I. Şestakov au avut ideea de a aplica studiul algebric al logicii cu două valori în analiza schemelor cu contacte şi relee[48].

Un contact este o lamă metalică mobilă care poate închide sau deschide un circuit. El poate avea deci două poziţii: închis sau deschis. Să-i asociem o variabilă x, care să ia valoarea 0 dacă contactul este deschis şi valoarea 1 dacă contactul este închis:

Să considerăm acum două asemenea contacte legate în serie



Circuitul alcătuit din ansamblul lor este deschis dacă cel puţin unul din cele două contacte este deschis şi închis dacă amîndouă contactele sînt închise. Lui i se asociază, de asemenea, o variabilă z, a cărei valoare depinde de valorile pe care le iau variabilele x şi y asociate respectiv

heitswerten şi **C. C. Chang**, *Infinite valued logic as a basis for set Theory*, în „Logic, Methodology and Philosophy of Science", Proc. of the 1964 Int. Congress, Amsterdam, 1965.

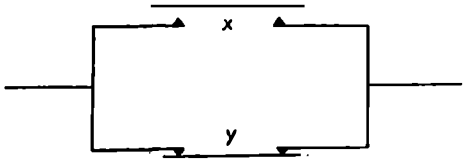
[48] **C. E. Shannon**, *A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits*, în „Transaction of the American Institute of Electrical Engineers", 57 (1938), pp. 713—723. Contribuţiile lui V. I. Şestakov se găsesc în teza sa de doctorat ţinută la Universitatea din Moscova (1938).

celor două contacte din circuit. Şi anume, z va avea valoarea conjuncţiei dintre x şi y

$$z = x \cdot y$$

valoare dată de matricea de la *3.3.

Montarea în paralel a celor două contacte ne conduce la un nou circuit,

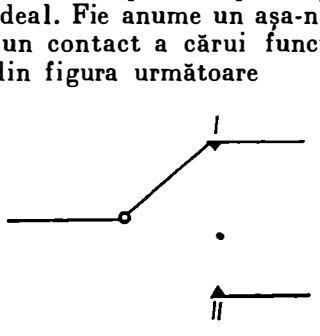


a cărui variabilă z va avea de data aceasta valoarea disjuncţiei dintre x şi y

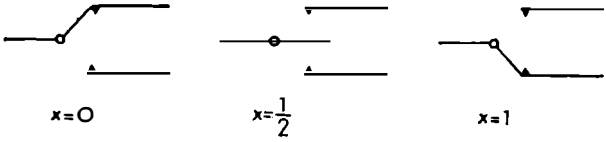
$$z = x \vee y$$

Într-adevăr, în acest caz circuitul va fi deschis dacă ambele contacte sînt deschise şi închis atunci cînd măcar unul din ele este închis. Astfel putem studia funcţionarea unui circuit avînd mai multe contacte, legate în serie şi în paralel, construind expresia în care intră variabilele acestor contacte legate, respectiv, prin intermediul conjuncţiei şi disjuncţiei bivalente.

Să considerăm însă un caz simplu, din care rezultă că această schematizare este prea simplistă şi nu corespunde decît unui caz ideal. Fie anume un aşa-numit contact de transfer, adică un contact a cărui funcţionare poate fi uşor înţeleasă din figura următoare



El este format din două contacte, I și II. Lama mediană le poate stabili pe rînd. Ea se află sub acțiunea unui electromagnet. Cînd nu circulă curent prin el, lama aflată în poziția I stabilește acest contact. Cînd facem să treacă curent prin electromagnet, lama va fi atrasă de acesta, mutîndu-se în poziția II, desfăcînd primul contact și stabilindu-l pe al doilea. Din aceste motive, contactul de transfer aflat în prima poziție poartă numele de „neacționat", iar aflat în poziția a doua poartă numele de „acționat". Trecerea dintr-o poziție în cealaltă se face în momentul în care lăsăm să treacă curentul prin electromagnet sau îl întrerupem. Să observăm însă că funcționarea reală a contactului de transfer se face trecînd prin trei poziții diferite: poziția I, poziția intermediară I—II și poziția II. Îi vom asocia deci o variabilă x, putînd lua trei valori, după cele trei poziții ale contactului, și anume:



Studiul funcționării unor asemenea contacte ne conduce, așa cum a arătat logicianul român Gr. C. Moisil, la studiul algebric al unei logici Łukasiewicz trivalente[49].

[49] Primul care a utilizat o logică polivalentă în studiul schemelor cu contacte și relee a fost tot matematicianul sovietic V. I. Șestakov (1946). Începînd din 1954, Gr. C. Moisil, împreună cu colaboratorii săi, au adus contribuții importante în acest domeniu. (Pentru un studiu mai detaliat și referințe bibliografice vedeți lucrarea sa *Încercări vechi și noi de logică neclasică.)*

10
Concluzii finale

* 10.1. Distincţia dintre logicile modale şi logicile polivalente

S-a introdus o distincţie între aşa-numitele logici modale şi logici polivalente, despre care am pomenit ceva în introducerea acestei lucrări, dar despre care putem vorbi acum în termeni mai precişi.

Logica matematică de tip clasic făcea uz de două valori pentru propoziţii: adevărul şi falsul. O astfel de logică s-a numit, cu un termen mai general, o *logică standard (Standard logic*[1]*)*. În opoziţie cu această logică de tip clasic, care după cum vom vedea apărea unor logicieni mult prea largă, s-au construit logici *non-standard* sau neclasice sau încă nechrysippiene, în care deşi ideile se îmbogăţesc, introducîndu-se noi caracterizări pentru propoziţii, după cum am văzut, acestea atrag după sine o serie de restricţii. Vom vedea mai departe cum se explică lucrul acesta.

În rezumat, vom putea clasifica sistemele de logică în două categorii: logici standard şi logici non-standard. Pentru a construi o logică non-standard se pot utiliza

[1] **R. Ackermann,** *Introduction to many valued logics*, Routlege & Kegan Paul, London—NewYork, 1967, p. 15.

două metode: o primă cale este aceea de a introduce în calculul respectiv, în mod explicit, modalităţile; modalităţi care vor fi reprezentate ca operatori ai oricărei formule bine formate. Aceşti operatori nu pot fi definiţi utilizînd exclusiv pe cei din logica standard. De aceea o serie dintre ei sînt consideraţi drept „noţiuni primitive" şi introduşi de la început. Ceilalţi apar pe măsura dezvoltării calculului şi sînt definiţi cu ajutorul celor „primitivi" (la Lewis, de pildă — cap. 4 —, o asemenea noţiune primitivă era posibilitatea: $\Diamond$. Celelalte modalităţi — necesitatea, imposibilitatea etc. — erau definite ulterior şi cu ajutorul ei).

Interpretarea intuitivă a modalităţilor, aşa cum apare în gîndirea filozofică, fie antică, fie modernă, este destul de greu de clarificat, şi astfel o serie de rezultate bizare pot să apară, după cum s-a şi văzut, în cadrul logicilor modale. De exemplu, oricare ar fi logica modală, ea impune distincţiei „adevăr-fals" din logica standard o distincţie mai cuprinzătoare, „posibil-non-posibil", astfel încît propoziţiile posibile includ toate propoziţiile adevărate şi unele din propoziţiile false din logica standard[2].

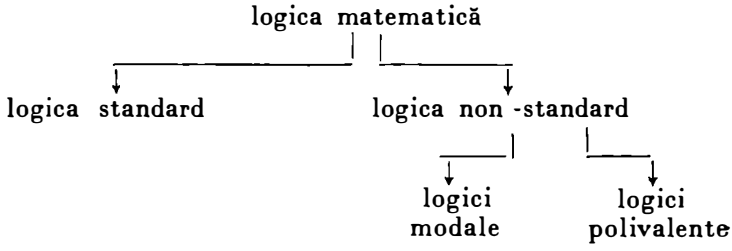
Cealaltă cale este aceea a construirii logicilor polivalente[3], care pleacă tot de la ideea că propoziţiile pot avea şi alte valori decît numai adevărul şi falsul. O astfel de logică non-standard se prezintă ca un calcul în care valorile variabilelor propoziţionale nu se reduc la două, ci pot fi în număr mai mare.

Un caz evident, de a descrie mai mult decît trei valori pentru propoziţii, este acela cînd se consideră că o propoziţie poate fi adevărată, falsă sau fără sens. Un calcul trivalent corespunzător va fi construit atunci pentru a reflecta această presupunere[4].

---

[2] *Ibidem*, p. 16.
[3] *Ibidem*, p. 17.
[4] După cum am văzut, sistemul trivalent al lui Bocivar (*9.5) era construit pe baza unei asemenea interpretări.

În rezumat, logica matematică poate fi împărţită astfel:



Se pune în mod firesc problema, care nu este pînă azi rezolvată în mod precis: care este raportul dintre logicile modale şi logicile polivalente?

După J. Łukasiewicz, un sistem formal de calcul propoziţional poate fi considerat drept o logică modală dacă printre conectivele lui (definite sau nedefinite) apar doi operatori cu un singur argument, unul de posibilitate, pe care îl notăm, de exemplu, cu Δ, şi altul de necesitate, simbolizat prin Γ, astfel ca dacă N este negaţia, să avem[5]:

— Γp implică întotdeauna p, dar nu şi reciproc;
— Γp nu este întotdeauna falsă (deci $N\,\Gamma p$ nu este întotdeauna adevărată, adică nu este o teoremă);
— p implică întotdeauna Δp, dar nu şi reciproc;
— Δp nu este întotdeauna adevărată, deci nu este o teoremă;
— Γp este echivalentă cu $N\Delta Np$[6].

Majoritatea sistemelor modale îndreptăţesc această condiţie, de altfel destul de largă. Łukasiewicz însuşi construieşte (în studiul citat) un sistem în cadrul acestei definiţii. Sistemul său are însă o particularitate: toţi functorii utilizaţi pot fi definiţi cu ajutorul unor matrice de adevăr în care propoziţiile se consideră că iau valori de adevăr, notate cu 1, 2, 3 şi 4 (1 = adevărul, 4 = falsul, 2 şi 3 reprezintă posibilitatea în două forme diferite).

---

[5] **J. Łukasiewicz,** *A system of modal logic* („Journal of Computing Systems", vol. I, nr. 3, § 1, 1953).

[6] Vedeţi şi **A. N. Prior,** *Time and Modality*, Oxford, 1957, pp. 2—3.

De altfel el afirmă în mod categoric că toate logicile modale, cel puţin în sensul dat de el acestora, trebuie să fie polivalente[7]. De aceeaşi părere sînt şi alţi logicieni, ca J. B. Rosser etc.

O problemă extrem de importantă este aceea pusă de Lewis (şi alţii), şi anume că pentru a lămuri noţiunile fundamentale de implicaţie, compatibilitate etc. trebuie să facem apel la relaţii pur intensive, care sînt funcţii de adevăr. Într-adevăr, după cum observă şi Blanché[8], „o teorie logică a relaţiilor interpropoziţionale, aşa-zisa teorie a funcţiilor de adevăr, trebuie în mod necesar să neglijeze acel *nexus* logic dintre propoziţii, pentru a se sprijini pe adevărul lor material".

Problema rămîne deschisă, fiindcă, de exemplu, J. Dugundji[9] a reuşit să arate că sistemele lui Lewis (toate cele opt: S1—S8) nu admit o interpretare polivalentă în sensul lui Łukasiewicz. Aceasta înseamnă că nu se pot construi pentru toţi functorii matrice de adevăr cu următoarele două proprietăţi:

— în cadrul lor propoziţiile să poată lua doar un număr finit oarecare de valori de adevăr, şi

— faţă de ele să fie tautologii (adică: formule identic adevărate) acele şi numai acele formule care pot fi demonstrate în sistemele respective.

Rezultatul acesta este asemănător cu acela obţinut de K. Gödel pentru calculul propoziţional intuiţionist[10].

Aşa cum am arătat în capitolul al 5-lea, sistemele lui Łukasiewicz au fost construite pornind tocmai de la o interpretare polivalentă.

Există dificultăţi serioase în interpretarea polivalentă a modalităţilor, care conduc uneori la situaţii foarte greu de admis. De exemplu, propoziţia considerată de Łukasiewicz care exprimă o stare posibilă de lucruri: „De acum

[7] **J. Łukasiewicz,** *op. cit.*, p. 113.

[8] **R. Blanché,** *Raison et Discours*, Paris, 1967.

[9] **J. Dugundji,** *Note on a property of matrices for Lewis and Langford's calculi of propositions*, în „Journal of Symbolic Logic", V (1940), pp. 150—151, 1940.

[10] **K. Gödel,** *Zum intuitionistischen Aussagenkalkül*, în „Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien", math.-naturwiss. Klasse, 69, pp. 65—66, 1952.

într-un an voi fi la Varșovia" scapă principiului contradicției. O asemenea propoziție are în logica lui Łukasiewicz valoarea posibil, notată cu $\frac{1}{2}$, însă $N\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (negația posibilului este posibilul) și în baza matricei conjuncției avem

$$K\ \frac{1}{2}\ N\ \frac{1}{2} = K\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Principiul contradicției, aplicat acestei propoziții, are valoarea $\frac{1}{2}$, adică este numai posibil și nu adevărat.

S-a încercat, pentru a depăși aceste dificultăți, să se interpreteze valorile de adevăr nu fiecare în parte, ci în grupări de asemenea propoziții. O astfel de încercare a fost făcută, de exemplu, de E. L. Post[11].

În rezumat, problema interpretării unui sistem formal polivalent prin valori modale este o problemă extrem de dificilă și de cele mai multe ori conduce la concluzii paradoxale.

Aceste rezultate sînt inevitabile, fiindcă nu este posibil să se vorbească de modalități sau de adevăr și fals fără a presupune implicit o anumită concepție în baza căreia aceste idei sînt introduse și care, tocmai fiindcă nu sînt supuse unei delimitări precise, vor apărea, pe parcursul dezvoltării sistemului de logică respectiv, într-un fel sau altul. În acest sens, R. Ackermann scrie[12]: „O reîmpărțire propusă a intervalului adevăr-fals, ca fundament al unei logici polivalente, este aproape totdeauna rezultatul intervenției unei teorii semantice sau epistemologice".

* 10.2. Raportul dintre logica bivalentă și logicile polivalente

Am urmărit pe larg în capitolul 3 al acestei lucrări cum se constituie ca sistem formal și cum se dezvoltă logica

[11] **E. L. Post,** *Introduction to a General Theory of Elementary Propositions.*

[12] *Ibidem,* p. 22.

bivalentă. Am urmărit apoi o serie de alte sisteme logice: logica lui Lewis, logica lui Łukasiewicz, logica lui Heyting etc., sisteme care sînt de fapt polivalente, căci admit interpretări în care propozițiile pot lua mai mult de două valori de adevăr. Se poate pune problema comparării logicii bivalente (ca sistem formal) cu aceste sisteme?

A. A. Zinoviev a susținut că pentru aceasta proprietatea logicii bivalente, în care negația adevărului este falsul și negația falsului este adevărul, trebuie păstrată sub o anumită formă și în celelalte sisteme. Și anume: dacă i este valoarea de adevăr corespunzătoare adevărului, iar k cea corespunzătoare falsului, atunci notînd cu N negația polivalentă respectivă trebuie ca

$$Ni = k \text{ și } Nk = i^{13}.$$

La ce revine această cerință? În primul rînd printre valorile de adevăr ale logicii respective trebuie să se afle una corespunzătoare adevărului și alta corespunzătoare falsului — condiție, de altfel, destul de îndreptățită dacă ținem seama de interpretarea sistemului respectiv. Pe aceste valori negația trebuie să opereze la fel ca în logica bivalentă.

Ceea ce se poate cere de la negație se poate cere însă de la orice operație. Conjuncția, de pildă, a două propoziții să fie adevărată cînd fiecare dintre propoziții este adevărată și falsă atunci cînd cel puțin una este falsă. Cu alte cuvinte, orice operație, cînd argumentele sale iau doar valorile adevărat (A) și fals (F) să capete exact aceeași valoare pe care în cazul similar o capătă în logica bivalentă.

---

[13] **A. A. Zinoviev,** *Philosophical problems of many valued logic,* Dordrecht, 1963, p. 91. Autorul se referă aici doar la acele logici polivalente cum sînt logicile L_m, care admit un număr finit de valori de adevăr.

Nu acesta este cazul tuturor sistemelor polivalente. În logica trivalentă a lui Post, de exemplu, apare negația ciclică avînd următoarea matrice de adevăr[14].

a	$\sim a$
A	T
T	F
F	A

În acest caz negația falsului este adevărul; negația adevărului nu mai este însă falsul, ci terțiul. Reichenbach folosea „negația" de mai sus pentru a afirma, în sistem, că o propoziție ia o anumită valoare de adevăr[15].

Sistemele polivalente în care toți functorii sînt aceiași ca în logica bivalentă și astfel definiți încît pentru valorile „adevărat" și „fals" ale argumentelor iau aceleași valori ca în logica cu două valori se numesc *normale*. Logica trivalentă a lui Łukasiewicz (fără functorul T) este un exemplu de un astfel de sistem normal.

Putem stabili acum un rezultat general privind sistemele normale. Tautologiile oricărui astfel de sistem sînt și tautologii ale logicii bivalente.

Pentru a vedea acest lucru, să luăm o tautologie a unui astfel de sistem. Ea este o formulă construită cu ajutorul variabilelor propoziționale p, q, r... (noi vom presupune pentru simplificare că apar două asemenea variabile — p și q — , dar cititorul poate observa că raționamentul poate fi extins în același mod pentru cazul unui număr oarecare de variabile) și a functorilor respectivi. Adică, în fond, avem funcție de adevăr de argumentele p și q: $f(p,q)$. Fie cele n valori pe care le pot lua, în mod independent, aceste argumente: A (adevărul), F (falsul), iar V_1, V_2 ..., V_{n-2} celelalte $n-2$ valori, a căror semni-

[14] Vedeți *8.6. Vom nota de data aceasta pentru mai multă claritate valorile t_3, t_2, t_1 prin A, T și F (adevărul, terțiul și respectiv falsul).

[15] Vedeți, de exemplu,*9.4.

ficație pe moment nu ne interesează. Întrucît formula este o tautologie, ea va avea următoarea matrice de adevăr:

$f(p,q)$	A	F	V_1	$V_2 \ldots V_{n-2}$
A	A	A	A	$A \ldots A$
F	A	A	A	$A \ldots A$
V_1	A	A	A	$A \ldots A$
V_{n-2}	A	A	A	$A \ldots A$

Dacă limităm la două, A și F, cele n valori (situîndu-ne astfel în logica bivalentă), formula $f(p,q)$ rămîne o tautologie așa precum ne arată matricea:

$f(p,q)$	A	F
A	A	A
F	A	A

submatrice a celei de mai sus.

În general însă, reciproca nu mai este adevărată[16]. De pildă principiul complementar principiului clasic *reductio ad absurdum:*

$$\sim p \supset p \,.\supset\, .\, p,$$

tautologie în logica bivalentă (este teorema 2.18 din *Principii*), nu este tautologie în nici una din logicile polivalente ale lui Łukasiewicz, nici în cea cu o infinitate de valori. Sistemele polivalente normale sînt în general mai sărace în tautologii decît sistemul bivalent. Ele cir-

[16] Există, totuși, și cazuri în care reciproca este adevărată. Prior dă un asemenea caz sub forma următoarei teoreme *(Formal Logic,* p. 239): Toate legile implicației și negației bivalente sînt valabile pentru o implicație și o negație trivalentă care au proprietățile (vom nota cu C și N implicația și respectiv negația în cauză)

$Cpq \neq A$ dacă $p = A$ și $q \neq A$;
$Cpq = A$ în rest.
$Np \neq A$ dacă $p = A$;
$Np = A$ în rest.

cumscriu, din mulțimea de teze ale logicii bivalente, o parte*.

Însă nu numai sistemele polivalente normale se află în această situație. Logica intuiționistă, de exemplu, nu poate fi interpretată dînd propozițiilor un număr finit de valori. Dar toate teoremele sale, făcînd traducerea conectivelor după „dicționarul" lui Becker (*6.10), sînt și teze clasice. Reciproc însă nu. Care sînt consecințele unei asemenea limitări în mulțimea de teoreme clasice?

Functorii pe care îi utilizează atît logica clasică cît și logicile polivalente (negația, implicația etc.) vor avea în cele din urmă un sens mai limitat față de cazul bivalent. Pentru a înțelege acest lucru, un singur exemplu ne poate fi suficient. Am văzut că în logica bivalentă disjuncția $p \vee q$ a două propoziții p și q este adevărată, atunci cînd cel puțin una din propoziții este adevărată. Dar teoreme sînt nu propozițiile adevărate, ci cele identic adevărate. Ca urmare, disjuncția bivalentă poate fi identic adevărată și deci teză, fără ca nici una dintre propozițiile p și q să fie teze (identic adevărate), așa cum se întîmplă în cazul principiului terțiului exclus: $p \vee \sim p$.

În logica intuiționistă, după cum știm, acest principiu nu poate fi demonstrat. Deoarece nu mai este posibil ca disjuncția intuiționistă a două propoziții să fie o teză fără ca una anume dintre cele două propoziții să fie teză. Observăm, așadar, că logica intuiționistă operează o anume limitare în înțelesul bivalent al noțiunii cu care lucrează. Aceasta a fost observată de Łukasiewicz, după cum am văzut. Renunțările implicate însă de concepția Brouwer-Heyting sînt mult mai vaste[17].

Să considerăm numai una din teoremele abandonate de Heyting, de exemplu aceea a formelor normale de tipul Hilbert. După cum se știe, Hilbert a demonstrat o teoremă,

* Semnalăm că (în *Probleme de logică dialectică în filozofia lui G.W.F. Hegel*, vol.II, 1964, p.206 și urm.) Pavel Apostol ajunge, prin cu totul alte argumentări, la interpretarea logicilor polivalente ca expresii ale aceluiași cîmp logic pe care-l explorează logica bivalentă, cîmp logic supus, în cazul logicilor polivalente, unor restricții noi.

[17] Cîteva indicații sumare în această privință privind calculul propozițional au fost date în *6.8.

după care orice expresie a calculului propoziţional bivalent poate fi redusă la o „formă normală", care nu mai conţine decît semnele de negaţie, disjuncţie şi conjuncţie[18]. Teorema lui Hilbert şi Ackermann arată că ceea ce este caracteristic pentru „formulele adevărate" (tautologii) este că formele lor normale sînt conjuncţiile unor disjuncţii care conţin fiecare o variabilă propoziţională şi negaţia ei, adică tocmai principiul terţiului exclus. Cu alte cuvinte, toate tautologiile calculului propoziţional al logicii bivalente nu exprimă nimic altceva decît principiul terţiului exclus, într-o formă mai mult sau mai puţin complicată, adică aplicat la expresii mai simple sau mai complicate. Caracteristica adevărului unei tautologii este deci tocmai principiul terţiului exclus.

Dacă intuiţioniştii susţin că principiul terţiului exclus nu mai este o teoremă în logica lor, atunci prin aceasta au renunţat la toate formele normale ale tautologiilor, care sînt adevărate numai pentru că principiul terţiului exclus este o formulă adevărată. Prin urmare, punctul de vedere intuiţionist impune renunţarea la teorema formelor normale.

Se pune dar problema de a vedea cîte sacrificii sînt cerute logicii clasice — şi, pentru a spune aşa, bunului simţ logic — pentru a putea interpreta un sistem formal polivalent drept „logică". Ar trebui să facem o listă completă şi explicită de tot ceea ce trebuie abandonat din logica clasică şi o listă tot atît de completă şi de explicită a avantajelor pe care le-ar oferi o asemenea „logică polivalentă". Numai din compararea acestor liste se va putea conchide dacă este acceptabil sau nu să se facă sacrificiile cerute.

* 10.3. Funcţia negaţiei *

În lucrarea noastră *Logica polivalentă* din 1943 închinasem un capitol întreg construcţiei unui sistem de logică

[18] **D. Hilbert** şi **W. Ackermann**, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer, Berlin, 1949, ed. a II-a, pp. 10—12.

* Este vorba de negaţia formală şi nu de cea dialectică.

trivalentă — logica T — pe care îl schițasem numai. Am considerat în acest sistem că valorile unei variabile propoziționale p pot fi trei: A, F și T, fără nici o altă specificație. Aceste trei simboluri A (adevărul), F (falsul) și T (terțiul) se comportă ca niște functori și valorizează variabila propozițională, înțelegînd prin valorizare acordarea uneia din aceste valori variabilei considerate:

$$Ap = \text{„}p \text{ este adevărat“} \qquad Df.$$

$$Fp = \text{„}p \text{ este fals“} \qquad Df.$$

$$Tp = \text{„}p \text{ este terț“} \qquad Df.$$

O variabilă propozițională nu poate lua decît una din aceste trei valori, A, F și T, a patra posibilitate nu există, *quartum non datur*. Cu alte cuvinte, simpla enumerare a celor trei valori posibile pentru variabilele propoziționale introduce o axiomă, care exprimă că nu există decît trei valori pentru variabilele propoziționale —principiul cuartului exclus:

$$Ap \vee Fp \vee Tp$$

În lucrarea menționată, încercam să punem în evidență mai ales funcția negației, care nu este tot atît de simplă ca în sistemele de logică bivalentă.

Într-adevăr, acțiunea negației asupra unei valori acordate unei variabile propoziționale nu mai este univocă. Dacă negăm că „p este A“, nu rezultă decît că p poate avea valoarea F sau T. Altfel spus, dacă notăm functorul de negație cu N, urmează că avem următoarele trei formule în mod imediat:

(1) $NAp = Fp \vee Tp$ $\qquad Df.$

(2) $NFp = Tp \vee Ap$ $\qquad Df.$

(3) $NTp = Ap \vee Fp$ $\qquad Df.$

Într-o logică polivalentă, în general, negația nu poate avea o funcție univocă, ci ea ne conduce la posibilitatea ca propoziția, a cărei valoare se neagă, să aibă una din celelalte valori rămase.

În aceste condiții, nici disjuncția nu mai poate fi considerată exact ca în logica bivalentă. Într-adevăr, în logica clasică, disjuncția logică este definită prin functorul $\vee$ cu următoarea matrice:

$\vee$	A	F
A	A	A
F	A	F

Adică, după cum se știe, $p \vee q$ este adevărată dacă una (cel puțin) din variabilele componente ia valoarea A. Această idee, care corespunde expresiei latine *vel ... vel* (sau ... sau) înseamnă: sau una sau alta din alternative, sau amîndouă. Există încă o idee de genul acesta, exprimată în limba latină prin *aut ... aut* (sau ... sau), care însă presupune numai una din alternative, cu excluderea celeilalte. „*Aut Caesar aut nihil*" (sau Cezar, sau nimic). Functorul acesta (disjuncția exclusivă) va avea matricea bivalentă:

$\mathbf{V}$	A	F
A	F	A
F	A	F

Este evident că în cazul logicii trivalente considerate functorul de disjuncție nu poate avea decît sensul unei disjuncții exclusive.

În rezumat, negația nefiind univocă în astfel de sisteme, nici disjuncția nu poate rămîne cu același sens ca în logica clasică.

Același lucru se poate spune relativ la toți functorii din logicile polivalente: ei trebuie examinați în raport cu ideile deja admise, care le impun anumite delimitări, de care, în general, nu s-a ținut seama.

Este foarte ușor să ne convingem că negația în logicile polivalente are o acțiune univocă, ceea ce implică un caracter cu totul arbitrar pentru negație, care cu greu își mai poate menține un sens logic. Dacă din punctul de vedere al construirii unui sistem formal (fără interpretare

logică) nu se poate aduce nici o obiecție jocului algebric pe care-l construim prin atribuirea unei funcții arbitrare functorului de negație N, din punct de vedere logic acest lucru nu este indiferent, fiindcă conduce la considerații greu acceptabile sau chiar inacceptabile, cum am și întîlnit unele în cursul lucrării noastre.

De exemplu, Łukasiewicz, după cum știm, consideră pentru negație următoarea matrice:

p	0	$\frac{1}{2}$	1
Np	1	$\frac{1}{2}$	0

din care se vede că acțiunea functorului N asupra valorii luate de o propoziție este absolut univocă. Astfel, dacă negăm valoarea 0 pentru variabila p, atunci valoarea ei este 1, în logica lui Łukasiewicz (ca și în logica bivalentă).

Dacă negăm că o propoziție este falsă, atunci ea este adevărată. Dar este ușor de văzut că acest rezultat este ales arbitrar. În adevăr, dacă punem în fața variabilei functorii (așa cum am arătat mai sus în logica T), matricea lui Łukasiewicz spune:

$$N0p = 1p \qquad Df.$$

$$N\frac{1}{2}p = \frac{1}{2}p \qquad Df.$$

$$N1p = 0p \qquad Df.$$

Dar, deoarece în această logică variabilele propoziționale pot avea trei valori, 0, $\frac{1}{2}$, 1, urmează că, dacă negăm falsitatea unei propoziții, atunci ea poate fi adevărată sau numai posibilă. Același lucru pentru celelalte valori:

$$N0p = \frac{1}{2}p \vee 1p$$

$$N\frac{1}{2}p = 1p \vee 0p$$

$$N1p = 0p \vee \frac{1}{2}p$$

„Neg că p are valoarea $\frac{1}{2}$" înseamnă „p are sau valoarea 1, sau valoarea 0" (sau este adevărată sau falsă). De asemenea, negația propoziției „p are valoarea 1" conduce la afirmația disjuncției „p are valoarea sau 0 sau $\frac{1}{2}$".

Același lucru se poate spune despre negația lui Heyting. Negația în logica lui are matricea:

p	0	1	2
$\neg p$	1	0	1

Dacă am ales pentru propoziții trei valori(intuiționiste): adevărul (0), falsul (1) și valoarea „propoziția nu poate fi falsă, dar adevărul ei nu poate fi demonstrat" (2), atunci negația unei astfel de valori nu poate fi univocă, ci ne duce la o disjuncție. Dacă punem și aici functorii care „valorizează" o variabilă propozițională în fața variabilei propoziționale, avem:

$$\neg\, 0p = 1p \vee 2p \qquad Df.$$

$$\neg\, 1p = 0p \vee 2p \qquad Df.$$

$$\neg\, 2p = 1p \vee 0p \qquad Df.$$

Dacă neg valoarea 0 pentru variabila p, atunci p poate avea valoarea sau 1 sau 2 (celelalte rămase) etc.

Neținînd seama de aceste efecte ale funcției negației, se ajunge la rezultate bizare, uneori inadmisibile, iar contradicțiile directe sînt înlăturate prin restricții axiomatice.

Să considerăm următoarele egalități valabile, în logica bivalentă, prin definițiile conjuncției și implicației, în funcție de negație și disjuncție:

$$\sim (p \,.\sim p) \,.=.\, p \supset p \,.=.\sim p \vee p \qquad Df.$$

În logica intuiționistă aceste definiții (și echivalențe) nu pot fi scrise, deoarece cînd p ia valoarea 2 formula $\sim p \vee p$ (principiul terțiului exclus) are valoarea 2, iar celelalte valoarea 0:

$$0 \,.=.\, 0 \,.=.\, 2$$

La fel, în logica lui Łukasiewicz, cînd $p = \frac{1}{2}$, prima și ultima dintre ele iau valoarea $\frac{1}{2}$, iar cea din mijloc valoarea 1:

$$\frac{1}{2} \cdot = \cdot 1 \cdot = \cdot \frac{1}{2}$$

Cum s-a ajuns în logica trivalentă L_3 ca expresia $AN\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}$ să aibă valoarea $\frac{1}{2}$? Acest rezultat s-a obținut *grație unei matrice a negației, aleasă arbitrar, și călcînd însuși principiul pe care îl admisese, al cuartului exclus.* Într-adevăr, dacă Łukasiewicz ar fi explicitat ceea ce admisese, anume că există trei valori pentru propoziții, el trebuia să pună ca axiomă explicită principiul cuartului exclus (pe care noi îl scriem, pentru a-i arăta în întregime conținutul, utilizînd functorii „de valorizare"):

$$AA\,1\,p\,\frac{1}{2}\,p\,0\,p$$

Aceasta ar fi arătat, de la început, că negația nu mai poate avea o funcție univocă și că alegerea unei matrice univoce calcă însuși principiul cuartului exclus, admis ca teză de sistemul respectiv. Dacă ținem seama de matricele acceptate de Łukasiewicz pentru disjuncție și negație, avem pentru principiul terțiului exclus exprimat de formula $ANpp$ (unde punem în evidență functorii de „valorizare" pentru fiecare valoare):

$$AN1p1p = A0p1p = 1p$$

$$AN\frac{1}{2}\,p\,\frac{1}{2}\,p = A\,\frac{1}{2}\,p\,\frac{1}{2}\,p = \frac{1}{2}\,p$$

$$AN0p0p = A1p0p = 1p$$

Ceea ce l-a condus pe Łukasiewicz să constate că principiul *tertium non datur*, $ANpp$, nu funcționează în cazul

propoziţiilor care au valoarea $\frac{1}{2}$, fiindcă în cazul acesta el însuşi are valoarea $\frac{1}{2}$.

Să ţinem însă seama de principiul cuartului exclus şi de efectul pe care îl are, în aceste condiţii, negaţia asupra valorii acordate variabilei, după cum am arătat mai sus. Să acceptăm şi matricea disjuncţiei aşa cum este construită de Łukasiewicz (deşi şi ea este discutabilă). În cazul acesta negaţia duce la o determinare univocă (din cauza matricei disjuncţiei) şi avem:

$$N1p = A\frac{1}{2}\,p0p = \frac{1}{2}\,p \qquad Df.$$

$$N\,\frac{1}{2}\,p = A1p0p = 1p \qquad Df.$$

$$N0p = A1p\,\frac{1}{2}\,p = 1p \qquad Df.$$

Să vedem acum ce valoare ia, pentru fiecare valoare a variabilei propoziţionale, principiul terţiului exclus, $ANpp$:

$$AN1p1p = A\,\frac{1}{2}\,p1p = 1p$$

$$AN\,\frac{1}{2}\,p\,\frac{1}{2}\,p = A1p\,\frac{1}{2}\,p = 1p$$

$$AN0p0p = A1p0p = 1p$$

Cu alte cuvinte, prin jocul definiţiilor, principiul terţiului exclus rămîne valabil. Prin urmare afirmaţia că „o propoziţie este sau adevărată sau falsă" nu contrazice afirmaţia cuartului exclus din logica trivalentă.

Această observaţie se aplică, în general, tuturor sistemelor polivalente, care fiind create liber se crede că sînt create arbitrar, adică amputînd chiar propriile noastre convenţii. Nu mai vorbim de dubla şi tripla negaţie etc., care în cazurile acestea, al logicilor cu mai multe valori, capătă o complexitate care, în general, nu este descifrată în toate nuanţele ei.

Gr. C. Moisil a atras atenţia asupra faptului că negaţia are, în sistemele nechrisippiene, diferite grade, ceea ce corespunde şi limbajului comun[19]:

„este fals că ..."

„este imposibil că..."

„este absurd că..."

Aceste expresii par a introduce trei trepte, falsitatea referindu-se la o constatare, imposibilitatea la o imposibilitate de fapt, iar absurditatea la o imposibilitate de drept.

Logicile łukasiewicziene (cu mai multe valori)introduc mai multe tipuri de negări, $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \ldots, \bar{\sigma}_n$, între care există relaţiile:

$$\bar{\sigma}_n\, x \subset \bar{\sigma}_{n-1}\, x \subset \ldots \subset \bar{\sigma}_1 x$$

Aceste relaţii arată că $\bar{\sigma}_n$ este negaţia cea mai „tare", în timp ce $\bar{\sigma}_1$ este negaţia cea mai „slabă". Pe lîngă aceste negaţii, zice Moisil, mai apare o negaţie intermediară N, care se găseşte între negaţia cea mai slabă şi cea mai tare.

$$\bar{\sigma}_n\, x \subset Nx \subset \bar{\sigma}_1 x$$

În afară de aceasta, logicianul român observă că negaţiile modale nu satisfac principiul dublei negaţii, dar satisfac principiul triplei negaţii.

Luînd o negaţie modală oarecare $\bar{\sigma}_i$ avem

$$\bar{\sigma}_i\, \bar{\sigma}_i\, \bar{\sigma}_i\, x = \bar{\sigma}_i x$$

Concluzia noastră este că negaţia avînd esenţial o funcţie logică, în legătură cu valorile de adevăr, ea nu poate fi definită prin matrice arbitrare, ci numai prin acelea permise de înseşi ideile primitive de la care se pleacă în construirea unui sistem de logică cu mai multe valori.

* 10.4. Valori de adevăr

Logicile polivalente au putut fi construite numai pe baza convingerii că este posibil ca o propoziţie să ia mai

[19] **Gr. C. Moisil,** *Încercări vechi şi noi de logică neclasică*, pp. 104—105.

multe valori de adevăr. Această concepție introduce o serie de idei în mod implicit, pe care, în general, logicienii nu s-au străduit să le expliciteze.

Cîtă vreme ne menținem în domeniul pur formal, al unui joc de esență algebrică, nu vom obiecta nimic aici; dar în momentul cînd un sistem formal — bivalent sau polivalent — este interpretat ca un sistem logic, s-au introdus imediat, pe nesimțite, o serie de idei și problema acceptării unui asemenea sistem ca „sistem logic" ne impune aceste idei, fără să știm și fără să vrem.

Am spus că, în sine, sistemul formal este o algebră. Să spunem mai întîi cîteva cuvinte despre această algebră formală.

*10.4.1. Algebre booleene și lukasiewicziene

În sistemele formale, care pot fi interpretate ca logici bivalente, întîlnim variabile care pot lua *numai* două valori. Aceste două valori pot fi interpretate ca adevăr sau fals, dar jocul algebric nu se face cu ajutorul semnificațiilor acestor „valori, ci prin faptul că sînt *două* valori: valoarea numerotată cu numărul 1 și valoarea numerotată cu 2 (sau numerotate cu 0 și 1, dacă preferăm să începem cu 0 notația noastră). Primul care a utilizat în mod efectiv două valori pentru variabile și a construit în modul acesta o algebră bivalentă, cu anumite reguli speciale, a fost matematicianul și logicianul englez George Boole (1815—1864)[20]. Din acest motiv, algebrele de acest fel, cu variabile bivalente, s-au numit *algebre booleene* sau simplu: *algebre Boole.*

Fie aceste două valori pe care le pot lua variabilele (nu numai cele independente, ci și cele dependente), 0 și 1. Se poate defini o algebră booleeană introducînd

[20] Lucrările principale ale lui Boole în care își expune rezultatele cercetărilor sale sînt: *The mathematical analysis of thought* (1847) și *An investigation of the laws of thought* (1854).

noțiunea matematică de mulțime ca idee primitivă. În acest caz vom avea definiția următoare[21]:

O algebră booleeană este o mulțime non-vidă $\mathfrak{M}$, în care s-au definit două operații binare, $\cup$ și $\cap$, și o operație unară —, și care, *grosso modo* vorbind, au aceleași proprietăți ca reuniunea (disjuncția), intersecția (conjuncția) și complementaritatea (negația submulțimilor dintr-un spațiu dat). Elementele mulțimii vor fi indicate prin literele $A, B, C\ldots$ și prin semnul $\in$; deci $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}$ etc. Operațiile $\cup$ și $\cap$ sînt caracterizate printr-o serie de axiome, în a căror alegere avem un grad destul de mare de libertate. Iată, de exemplu, una din aceste posibilități:

A1 $A \cup B = B \cup A$

A2 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

A3 $(A \cap B) \cup B = B$, $(A \cup B) \cap B = B$

A4 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

A5 $(A \cap -A) \cup B = B$, $(A \cup -A) \cap B = B$

Putem spune, pe scurt, cu ajutorul lămuririlor date mai sus:

o algebră booleană este o mulțime non-vidă $\mathfrak{M}$ cu trei operații $A \cup B, A \cap B, -A$, *care satisfac axiomele* $A1 - A5$.

Această algebră booleană se va dezvolta apoi pe baza regulilor de derivare a formulelor din axiome și se vor obține teoremele sale.

Pentru ca o astfel de construcție algebrică să devină o „logică bivalentă", trebuie să interpretăm anumite elemente ale acestei algebre ca reprezentînd adevărul și altele ca reprezentînd falsul.

În același mod s-a putut generaliza ideea aceasta și s-au construit algebre în care variabilele iau valori discontinue, mai mult decît două. O algebră în care variabilele iau trei valori, patru valori..., n valori, și chiar o infinitate

[21] **Roman Sikorski,** *Boolean Algebras* (Berlin — Göttingen — Heidelberg — New York, 1964).

de valori, va fi o algebră łukasiewiczieană, după numele celebrului logician polonez care a avut ideea aceasta în mod explicit.

Se poate defini o algebră łukasiewiczieană în termeni de mulțimi (luînd ca și mai sus, în algebrele Boole, noțiunea de mulțime ca termen primitiv). O algebră Łukasiewicz va fi o mulțime $\mathfrak{M}$ non-vidă, în care variabilele vor lua n valori posibile discrete și în care se definesc o mulțime finită de operații fundamentale și o mulțime de axiome[22].

Întreagă această construcție algebrică este un joc de semne, după reguli precis date, ca și în algebrele Boole, cu diferența că este un joc polivalent.

În algebrele Boole sau Łukasiewicz nu există nici o interpretare, nici o modelare; ele sînt numai combinații de semne vide, combinații realizate conform regulilor date. De aceea este posibil ca ele să fie „interpretate" ca logici, dar și ca altceva decît logici: de pildă ca un model mecanic (în mecanismele automate cu relee etc.).

* 10.5. Adevăr și fals

După cum am spus mai sus, legitimitatea construirii algebrei Boole sau Łukasiewicz este indiscutabilă. Interpretarea lor ca „sisteme logice" aduce însă cu sine, în mod implicit, admiterea unor ipoteze care au fost acceptate fără un control prealabil.

Acceptarea interpretării unui sistem bivalent sau polivalent ca un „sistem de logică" presupune în principal următoarele idei: există două valori logice (pentru sistemele bivalente) sau n valori logice (pentru sistemele polivalente) pe care variabilele le pot lua. Acest postulat, care la prima vedere pare inofensiv, permite însă transformarea logicii într-un calcul (bivalent sau polivalent). *Dar acest postulat acordă valorilor de adevăr un rang egal,*

---

[22] Pentru dezvoltări matematice ale algebrelor Łukasiewicz, a se vedea **Gr. C. Moisil**, *Le algebre di Łukasiewicz*, în „Acta logica", nr. 6, 1963).

la același nivel, și această simplă presupunere introduce în mod vag și obscur o întreagă concepție despre adevăr și fals.

Să considerăm mai întîi logica bivalentă, cu două valori: adevărul și falsul. După cum adevărul reprezintă ceva, tot astfel s-a extins această bază a valorii de adevăr și la fals: și el reprezintă ceva, cînd în realitate falsul nu reprezintă nimic din punct de vedere logic. Această iluzie este provocată de o confuzie verbală. Cînd spunem $2+2=5$ nu exprimăm ceva care are o anumită valoare de adevăr, ci exprimăm ceva care nu are nici o valoare[23]. Într-adevăr, cînd spunem „$2+2=4$" are valoarea de adevăr „adevărat", iar propoziția „$2+2=5$" are valoarea de adevăr „fals", falsul acesteia din urmă nu-i acordă vreo valoare, ci tocmai nu-i acordă nici una. Extensiunea aceasta nepermisă, de a acorda o „valoare" propozițiilor false, tot așa cum au o valoare propozițiile adevărate, se datorește faptului că în anumite cazuri determinate declararea unor propoziții ca fiind false echivalează cu afirmarea unei propoziții adevărate.

Să considerăm, de exemplu, numerele reale; ele pot fi despărțite în două mulțimi: mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale. Mulțimea R(reale) se descompune în două mulțimi complementare, mulțimea r(raționale) și mulțimea i(iraționale). Să presupunem că demonstrăm că x este un număr real, deci $x \in R$; că x nu aparține lui r, deci nu este rațional; rezultă atunci în mod necesar că x este un număr irațional. Cu alte cuvinte a spune că propoziția „x este un număr rațional" are valoarea de adevăr „fals" este echivalent cu a spune „x este un număr irațional". În acest caz, atribuirea valorii de

[23] În expunerea noastră, avem în vedere statutul logic și nu cel *epistemologic* sau *metodologic* al propozițiilor. În dialectica *procesului de cunoaștere* — proces de *constituire* a adevărului — falsul, ca negație dialectică, de data aceasta, a adevărului, poate avea „sens" ca moment al elaborării adevărului (determinînd, de pildă, printr-o negație a acestui *anume* fals asertarea unui *anume* adevăr). În logică, unde avem de-a face cu adevărul *constituit* și numai cu el, falsul, ca negație absolută a adevărului, cade *în afara* cîmpului *logic*. Studiul nostru fiind de logică formală, am fost obligați, din considerente metodice, să evităm incursiunile în epistemologie sau în geneza formelor logice.

adevăr „fals" unei propoziții înseamnă atribuirea unei valori reale acelei propoziții. Plecînd de la asemenea cazuri particulare și bine delimitate, cînd negația sau falsul unei propoziții poate da loc la o afirmație sau la o propoziție adevărată, conform definițiilor din cadrul problemei respective, s-a considerat, printr-o extrapolare nepermisă, că falsul unei propoziții sau negarea ei acordă în mod efectiv și universal o semnificație propoziției și prin aceasta o valoare de adevăr.

Acest mod de a vorbi despre valori de adevăr a făcut ca Frege să declare că o propoziție are valoarea de adevăr „adevărat" dacă este adevărată și are valoarea de adevăr „fals" dacă este falsă, fără a supune unui control riguros o atare atribuire.

Această considerare a noțiunilor de adevăr și fals, fără nici o specificare a nici uneia din caracteristicile adevărului și falsului, dă acestor noțiuni rang egal de „valori" ale propozițiilor și numai datorită acestui fapt sistemul formal al logicii poate fi dezvoltat algebric. Fără însă a stabili, în prealabil, raportul dintre adevăr și fals nu este posibil ca un sistem formal să fie interpretat în mod logic. Iar pentru a stabili acest raport, trebuie să știm în prealabil ce este adevărul.

Adevărul are totdeauna un caracter existențial; acest lucru a fost arătat de Aristotel, iar expresia prin care el enunță acest caracter esențial al adevărului era: „Orice cît are existență atît adevăr are" — Ωσθ'ὡς ἔχει τοῦ εἶναι, ὁ οὕτος καὶ τῆς ἀληθείας[24].

Această idee despre adevăr a fost prezentă continuu în filozofia europeană, iar scolasticii o vor repeta în formula: *Unumquodque quantum habet de entitate tantum habet de veritate*. Caracterul ontologic al adevărului exprimat prin aceste formulări devine esențial și, prin aceasta, există o *adaequatio rei et intellectus* — o adecvare între lucru și intelect — prin însăși natura lor.

Dacă pornim de la această concepție clasică a adevărului, după care numai ceea ce există — și în măsura în care există — este adevărat, este evident că ceea ce nu

[24] **Aristotel,** *Metafizica*, II (α), 1, 993 b.

există se situează la polul opus existenței, nu are nici un fel de inteligibilitate și nu este purtătorul nici unei valori. Adevărul și falsul nu se opun la același nivel, ca și cum ar fi două cunoștințe deosebite sau două opinii diferite: adevărul este un concept cu un conținut ontologic, iar falsul nu are nici un conținut.

Cum a fost posibil să se ajungă totuși la concepția după care și falsul acordă o valoare de adevăr unei propoziții? Această concepție a fost posibilă grație modificării a însuși conceptului de adevăr. Gîndirea modernă vede în adevăr o compatibilitate între lucruri. Pentru Kant adevărul va deveni „acordul gîndirii cu ea însăși". Desigur, această compatibilitate a gîndirii cu ea însăși este — în sens subiectivist și formalist—o exigență *sine qua non*. Însuși Aristotel a subliniat faptul acesta, căci iată ce scria el: „Trebuie ca tot ce este adevărat să fie în mod complet de acord cu sine însuși" [25].

Această condiție poate fi numită condiția *orizontală* a adevărului, adică de compatibilitate a tuturor elementelor care se află la același nivel, pe cînd condiția *adaequatio rei et intellectus* poate fi numită condiția *verticală* a adevărului, care-i asigură legătura cu realitatea.

Condiția orizontală a fost exprimată de scolastici, traducînd ideea lui Aristotel, astfel: *Quicquid enim est verum opus est ut ipsum secum omni ex parte consentiat*[26]. Ceea ce este indiscutabil adevărat și exprimă principiul noncontradicției pentru tot ce este gîndit ca și pentru gîndire. Dar condiția este *numai necesară, nu și suficientă:* este necesar ca toate lucrurile din lume și însăși gîndirea care le gîndește să fie necontradictorii; însă această condiție de inteligibilitate nu este suficientă pentru că adevărul este o *adaequatio rei et intellectus.*

Rămînînd numai la condiția de necontradicție a lucrurilor între ele, ca și a gîndirii însăși, filozofii și logicienii moderni, cu unele excepții, au izolat adevărul de obiectul lui, subiectul de obiect și astfel s-a putut ajunge la egalitatea logică între *a fi* și *a nu fi*, ca două situații omogene

[25] *Primele analitice*, I, 32, 47 a.

[26] Vedeți **Julius Pacius,** *Aristotelis Peripateticorum Principii Organum*, ed. a II-a, 1597, reproducere după textul original, Darmstadt, 1967.

și *simetrice* și, în consecință, la considerarea că afirmația și negația sînt și ele omogene și simetrice.[27]

Cu alte cuvinte, din cele două condiții stabilite mai sus pentru adevăr,

1. *adaequatio* (caracterul vertical)
2. *non-contradicția* (caracterul orizontal),

logicienii actuali au păstrat numai ultima condiție, care, nemaiavînd de-a face propriu-zis cu adevărul, devine o condiție de *construcție corectă sau incorectă*, avînd o legătură esențială cu expresivitatea logică.

Evident că atunci cînd stabilim, ca de exemplu în logica matematică, după anumite reguli acceptate prin convenție, ceea ce este construit corect și ceea ce nu este construit corect, atunci construcțiile formale convențional-juste sînt la același nivel cu cele convențional-nejuste și în cazul acesta ceea ce am numit adevărat, impropriu, poate sta față în față cu ceea ce am numit, impropriu de asemenea, fals.

Dar aceste abuzuri terminologice nu ne pot înșela; în logica matematică ceea ce se construiește nu are de-a face cu adevărul și falsul, ci cu conceptul de „construcție formală corectă sau incorectă".

De aici s-a trecut mai departe și s-a pus față în față, pe același plan, afirmația și negația. Am arătat însă în altă parte că cei mai mari gînditori de la Aristotel pînă la Wittgenstein au conceput negația pe un plan inferior față de cel al afirmației[28]. Clasicii marxism-leninismului vorbesc despre o „negație sterilă", care nu reprezintă „un stadiu de dezvoltare a obiectului însuși"[29]. În dialectică,

---

[27] În teoria materialist-dialectă a adevărului (cf. de exemplu, **A. Schaff,** *Nekotorîe problemî marxistsko-leniniskoi teorii istinî* — trad. rusă, Moscova, 1953 — sau **G. Klaus,** *Moderne Logik*, pp. 115 și urm. etc.) această alunecare a teoriei logicii în subiectivism și formalism a fost criticată. Noi căutăm să aducem în discuția acestei probleme epistemologice — din alt punct de vedere — noi argumente, cu justificare strict logică.

[28] **A. Dumitriu,** *Logique formelle et logique formalisée* („Revue Roumaine des Sciences Sociales", série de Philosophie et Logique, 1966).

[29] **F. Engels,** *Anti-Dühring*, Editura P.M.R., 1952, p. 409.

scria Engels, „a nega nu înseamnă pur și simplu a spune nu sau a declara un lucru inexistent, sau a-l distruge într-un mod oarecare"[30].

Această idee este precizată de Lenin astfel:

„Negativul este în oarecare măsură pozitiv—negația este ceva determinat, are un conținut determinat"[31]. Și mai departe: „Nu negația goală, nu negația fără rost, nu negația *sceptică*, îndoiala sînt caracteristice și esențiale în dialectică — care incontestabil conține în sine un element de negație și chiar cel mai important element — nu, ci negația ca moment al legăturii, ca moment al dezvoltării, menținîndu-se pozitivul"[32].

Prin urmare, fără un element de pozitivitate în ea însăși, cum este cazul negației dialectice, negația în sens formal devine „fără rost", fără sens și nu poate fi opusă afirmației.

Dar în logica matematică cele două concepte, de adevăr și de fals, de afirmație și de negație, sînt opuse ca două valori simetrice. De unde rezultă o serie de confuzii, introduse implicit, care au fost acceptate odată cu introducerea ideii de negație în sine, ca o valoare independentă de afirmație.

Să vedem acum ce se întîmplă în logicile care admit mai multe valori decît două pentru propoziții. După cum s-a văzut, nici un sistem de logică polivalentă nu poate depăși logica bivalentă.

Ce semnificație au atunci valorile de adevăr introduse în plus față de valorile logicii bivalente, adevărul și falsul? Trebuie aici să distingem cu precizie între ceea ce facem efectiv și interpretările pe care le dăm rezultatelor formale.

Din punct de vedere pur formal, am văzut că valorile „formale" ale logicii bivalente nu au decît semnificația „corect" și „incorect" (față de un punct de vedere conven-

---

[30] *Ibidem*, p. 166.

[31] **V. I. Lenin**, *Caiete filozofice*, Editura de stat pentru literatură politică, București, 1956, p. 69.

[32] *Ibidem*, p. 189. Aici este vorba de două accepții diferite ale termenului de negație: 1) negația dialectică, ca moment al procesualității, avînd, ca atare, semnificație existențială și logică în același timp *în cadrul unei dezvoltări* determinate și 2) negația (formal-) logică, despre care și marxismul afirmă că este „fără rost" atît sub raport existențial, cît și logic.

țional dat). Atunci ce înseamnă celelalte valori? Cum adevărul și falsul epuizează întreg domeniul logic, urmează că celelalte valori, acceptate pentru propoziții, se situează între adevăr și fals. Acesta este și motivul pentru care nici o tautologie a vreunui sistem de logică polivalentă nu poate să nu aparțină și logicii bivalente (în condițiile discutate la *10.2). Cu alte cuvinte dacă notăm cu A_1 adevărul și cu A_2 falsul, valorile de adevăr A_3, A_4, ... A_n, ale unei logici cu n valori, L_n, se situează toate între A_1 și A_2. Prin urmare trebuie să scriem, pentru a arăta acest rezultat:

$$A_1, A_3, A_4 \ldots, A_n, A_2.$$

Introducerea unor valori în plus, față de adevăr și fals, nu înseamnă o extindere a domeniului logic al aplicabilității acestor concepte, ci o determinare a unor planuri ale adevărului și falsului (în fond a ceea ce este corect construit și a ceea ce este necorect construit). Numai că interpretarea acestor idei, în legătură cu ceea ce este adevărul și falsul, va introduce concepții filozofice destul de vagi și greu de susținut, ale căror ultime consecințe nimeni nu și-a dat osteneala să le analizeze.

Această situație a valorilor de adevăr în logicile polivalente a fost observată foarte bine de Ștefan Lupașcu. Iată ce scrie el: „În realitate, logica polivalentă se întîlnește în prezența unei pulverizări sau a unui atomism al unei singure valori, fie acela al afirmației, pentru logicienii care cred întotdeauna într-o matematică platonică sau într-o metafizică leibniziană, fie aceea a negației, pentru cei care se inspiră din metafizica empirismului“[33]. Dar, ceea ce remarcă Lupașcu în mod deosebit, este că valorile introduse de logicile polivalente nu presupun un dualism intrinsec, nici un conflict structural. De aceea, scrie el, „un principiu al cuartului, al cvintului, al n-lea exclus

---

[33] **Ștefan Lupașcu,** *Logique et contradiction*, Paris, 1947, pp. 16—17. Notăm numai această distincție pe care o face Lupașcu, fără să adoptăm poziția generală pe care el o are în lucrarea citată.

înlocuiește în aceste logici principiul terțiului exclus, de care nu diferă decît prin număr și nu prin spirit".

În rezumat, introducerea unor valori multiple în logică s-a făcut cu intenția de a lărgi aparatul logic, dar în realitate el s-a restrîns prin aceasta. Natura domeniului logic nu se explicitează prin această încercare, ci se „implicitează". S-ar părea astfel că adagiul lui Heraclit se aplică în mod direct și în domeniul logic: „Naturii îi place să se ascundă".

Este adevărat că dacă considerăm sistemul formal polivalent ca o algebră łukasiewiczianā, el este mai bogat în idei decît un sistem sau o algebră booleană, dar dacă îl interpretăm logic, dintr-o dată lucrurile se inversează și domeniul de aplicabilitate este mai restrîns.

Domeniul logic s-ar organiza astfel interior în mod matematic, iar cunoașterea lui în mod exterior. Realitatea logică pare astfel că are tendința să se ascundă, să se comprime, iar cunoștința ar încerca să o reveleze, să o desfășoare. Procesul cunoașterii apare în consecință ca un act de explicitare a ceea ce, prin natura lui, este un mod implicit de a exista.

* 10.6. Logicitatea sistemelor polivalente

Analiza făcută mai sus ne permite să punem acum problema cea mai importantă a „logicilor" polivalente. Noi sîntem obișnuiți să gîndim într-un anumit mod, după regulile logicii bivalente; dacă am putea să alegem *ad libitum*, o altă logică, după care s-ar desfășura gîndirea noastră, atunci n-ar însemna că se reduce întreg aparatul logic la o convenție, la un sistem coerent, dar construit convențional? Totuși, numai în baza unei asemenea concepții s-au putut interpreta sistemele polivalente (algebre Łukasiewicz) ca fiind sisteme de logică. Concepția convențională valabilă indiscutabil cînd este vorba de sisteme formale, ale căror semne și formule construite din semne sînt vide de orice conținut și de orice sens *(sinnlos)*, cum spune Wittgenstein, nu mai este atît de simplu de admis cînd ne referim la interpretarea în termeni de logică a

acestor sisteme. Numai în convenționalismul logicienilor matematicieni a putut să fie imaginată logica ca o simplă coerență, ca un schelet bine construit, pe care se sprijină gîndirea în desfășurarea ei.

Această concepție presupune că orice sistem științific în general, și deci și oricare sistem de logică în particular, poate fi construit în mod relativist și convențional plecînd de la un grup, bine ales, de idei primitive și un grup de axiome, bine ales, care îndeplinesc anumite condiții, foarte largi de altfel.

Am arătat în altă parte deficiențele logice ale convenționalismului și relativismului logic, și în general științific, pentru a mai reveni aici[34]. Subliniem numai că ideea că pot exista mai multe logici, ba chiar o infinitate de logici, este o consecință inevitabilă a acestei concepții. Această concepție, acceptată implicit sau explicit de toți logicienii matematicieni, a fost teoretizată de Rudolf Carnap și exprimată astfel[35]: „În logică nu există morală *(In der Logik gibt es keine Moral)*. Fiecare poate să-și construiască cum vrea logica sa, adică forma limbii lui. Numai trebuie ca atunci cînd vrea să discute cu noi să ne arate în mod lămurit cum vrea să facă, să ne indice hotărîrile lui [sintactice], în loc să ne dea explicații filozofice".

Este evident că o asemenea concepție conține explicit posibilitatea de a construi orice logică, fie bivalentă, fie polivalentă.

Această idee — a convenționalismului logic—se bazează pe două presupuneri:

1. că logica este o formă a limbii;
2. că ideile și axiomele logicii — adică ale acestei forme a limbii — pot fi alese *ad placitum*. (Noi nu ne vom extinde aici prea mult asupra acestei probleme, fiindcă am făcut-o în altă parte)[36].

---

[34] A se vedea lucrarea noastră *Theory and System*, Editura Capelli, Roma, 1970.

[35] **R. Carnap,** *Logische Syntax der Sprache*, Springer, Wien, 1934, p. 45.

[36] **A. Dumitriu,** *La logique classique et les systèmes formels* („Revue Roumaine des Sciences Sociales", Sèrie de Philosophie et Logique 1966). Vorbim despre soluția acestei probleme în lucrarea noastră *Teoria logicii*, în curs de apariție.

Ideea „convenționalismului" se datorează, așadar, în primul rînd interpretării gîndirii în termeni lingvistici. Se consideră astfel că actul exprimării epuizează actul gîndirii. Dar acest postulat implicit sau explicit al convenționalismului logic neglijează tocmai ceea ce este mai important în actul gîndirii, și anume ceea ce este valabil în acest act, adică ceea ce este logic. Părăsind conținutul logic al actului gîndirii, singurul care putea să delimiteze, să circumscrie posibilitățile și efectivitatea expresiei, evident că s-au tăiat tocmai legăturile cu logicitatea expresiei, care-i dădea un fundament[37].

Pentru a da numai un exemplu, pe care îl socotim decisiv în această problemă, să considerăm principiul contradicției și principiul terțiului exclus.

Aceste principii sînt fundamentale și fără ele nu putem gîndi. Să le exprimăm pur formal:

[1] $\sim (p \,.\, \sim p)$ principiul contradicției,

[2] $\sim p \vee p$ principiul terțiului exclus.

În sistemul lui Russell, în care semnele de negație și de disjuncție sînt primitive, principiul [2] nu este decît altă expresie, prin definiție, a lui [1]. Într-adevăr, după cum am mai văzut, conjuncția logică este o noțiune definită în sistemul lui Russell:

$$p \,.\, q \,.=.\, \sim (\sim p \vee \sim q) \qquad Df.$$

Dacă particularizăm această definiție (care este de fapt o prescurtare) și o aplicăm la conjuncția logică particulară $p \,.\, \sim p$, avem, ținînd seama de negație:

$$p \,.\, \sim p \,.=.\, \sim (\sim p \vee \sim \sim p) \qquad Df.$$

$$\sim (p \,.\, \sim p) \,.=.\, \sim p \vee p \qquad Df.$$

Prin urmare, chiar din punct de vedere formal (logico-matematic), principiul terțiului exclus nu este altceva decît o altă expresie prin definiție a principiului contra-

[37] În *Probleme de logică dialectică*... (vol. II, pp. 145—184), P. Apostol face o distincție interesantă între structura *logică* unică și diferitele modalități de funcționare a acesteia („logici" diverse=expresii diverse ale unei logici unice).

dicției. Rezultă că pentru logica formală bivalentă o respingere a principiului terțiului exclus înseamnă o limitare a însuși principiului contradicției, care nu se mai poate explicita în cazul acesta, conform definițiilor abreviate, în forma principiului terțiului exclus.

Cum a fost atunci posibil să se atenueze sau chiar să se renunțe la principiul terțiului exclus? Acest fapt s-a datorat numai ipostazierii formalului logico-matematic ca o valoare în sine, ca o existență în sine[38]. Orice propoziție este adevărată sau falsă; dacă falsul este însă o valoare, de ce nu am spune că o propoziție poate fi adevărată, falsă sau să aibă o a treia valoare?

Toate acestea se datoresc unei concepții cu totul parțiale despre logică și despre principiile logice.

Să considerăm mai de aproape aceste principii, pentru a ne lămuri că ele nu pot fi reduse numai la expresia lor verbală[39]. Să vedem mai întîi cum au fost ele enunțate de Aristotel.

Acesta se ocupă în special de principiul contradicției în *Metafizica* sa. El începe prin a spune că principiile aparțin *Ființei* ca *Ființă*: ὅτι τοῦ ὄντος εστίν ἢ ὄν. Aceste principii sînt sesizate direct de intelect: de aceea ele nu mai sînt demonstrabile, fiind adevărate prin ele însele ca și *Ființa*.

„Cît îi privește pe aceia care încearcă să discute adevărul acestor axiome — scrie Aristotel — și despre măsura în care ele pot fi admise sau nu, ei îndrăznesc să facă acest lucru pentru că ignoră logica. Cînd abordezi o știință specială, trebuie să posezi deja aceste axiome, nu să începi să le studiezi atunci cînd te ocupi cu știința respectivă"[40].

Aristotel demonstrează că orice știință trebuie să aibă un început, iar începutul trebuie să fie cunoscut altfel decît prin demonstrații, căci în caz contrar construcția științei este circulară; trebuie să ne oprim undeva (pentru a începe), ἀνάγκη στῆναι. Această „oprire" are loc la

[38] Wittgenstein ajunge la concluzia că formulele adevărate (tautologiile) din logică sînt osatura lumii — *Das Gerüst der Welt. (Tractatus Logico-Philosophicus*, prop. 6, 124).

[39] Pentru dezvoltări a se vedea **A. Dumitriu**, *Istoria logicii*, 8.83.

[40] *Metafizica*, IV, 3, 1005 b.

principii, care toate au un caracter ontologic, iar dintre acestea „cel mai sigur, cel mai puternic" este principiul contradicției.

Iată acum formularea ontologică a acestui principiu: „Este imposibil ca cineva să poată concepe că același lucru — ταυτόν — este și nu este în același timp"[41].

Și mai departe: „Prin urmare dacă e exclus ca aceluiași subiect să-i revină predicate contrarii... și dacă propoziția negativă constituie contrariul celei afirmative, e evident că un om nu poate să presupună că unul și același lucru este și nu este[42]".

Mai găsim și următoarele formulări:

„Este imposibil ca două enunțuri contradictorii să fie adevărate în același timp, despre același obiect"[43].

„Este imposibil ca unuia și aceluiași lucru să-i convină și totodată să nu-i convină sub același raport același predicat"[44].

Vedem că însăși formularea principiului contradicției are mai multe sensuri la Aristotel, care se acoperă unul pe altul, și a rămîne cu un singur sens înseamnă să nu te referi la acest principiu, pe care Stagiritul îl socotea *cel mai puternic (sigur)* dintre principii: ἡ βεβαιοτάτη τῶν ἀρχῶν.

T. Kotarbinski găsește că exprimările principiului contradicției, la Aristotel, pot fi clasate în trei categorii[45]:

1) *principiul ontologic al contradicției*;

2) *principiul logic al contradicției* (cînd se referă la propoziții care nu pot fi adevărate împreună);

3) *principiul psihologic al contradicției*, care ar fi cuprins în enunțarea „este imposibil ca un om să-și poată închipui că unul și același lucru este și totodată nu este".

Principiul contradicției nu este numai formularea posibilă „nu este adevărat că o propoziție este adevărată și falsă în același timp", ci, mai ales, el este cuprins în for-

---

[41] *Ibidem*, IV, 3, 1005 b.
[42] *Ibid.*
[43] *Ibid.*, IV, 6, 1011 b.
[44] *Ibid.*, IV, 3, 1005 b.
[45] **T. Kotarbinski**, *Leçons sur l'histoire de la logique*, Paris, 1964, p. 30.

mularea „ceva nu poate să fie și să nu fie". Această formulare ontologică, care cuprinde și pe celelalte, scapă însă unei analize lingvistice sau pur formale (în sensul logico-matematic modern). Desigur, formularea de mai sus poate fi luată și în accepția „ceva nu poate să fie adevărat și să nu fie adevărat" adică adăugînd cuvîntul „adevărat". Rămîne să vedem dacă nu am particularizat însă, prin această simplă adăugire, acest principiu. Într-adevăr, această formulare cere să știm ce este adevărat și ce nu este adevărat. Dar ceea ce este adevărat și fals sînt judecățile și propozițiile. De unde rezultă că, în cazul acestei formulări, principiul contradicției a primit un înțeles restrîns, cu o aplicație delimitată față de sensul lui universal „ceva nu poate să fie și să nu fie", cînd nu se introduce nimic care să limiteze aplicația lui.

Dacă acum ne referim la principiul terțiului exclus, și el va avea aceleași formulări:

a) *principiul ontologic* al terțiului exclus: *ceva sau este sau nu este*;

b) *principiul logic* al terțiului exclus: *o propoziție sau este adevărată sau nu este adevărată*;

c) *principiul psihologic al terțiului exclus*: *un om își poate imagina numai că ceva este sau nu este.*

După cum vedem, echivalența formală a principiului contradicției cu principiul terțiului exclus se menține și la nivelul ontologic; cele două formulări sînt exact echivalente:

„ceva este sau nu este"
este echivalent cu
„nu există ceva care este și nu este".

Aceste două formulări nu mai pot fi discutabile nici măcar în „forma lor lingvistică".

Dacă se ține seama de aceste sensuri ontologice ale acestor principii, care sînt sensurile lor universale, se vede bine că ele nu mai pot fi amputate în nici un fel.

(1) Principiul contradicției, îndeosebi în formularea lui ontologică, este indiscutabil și nu este posibil un sistem de logică care să-l infirme.

(2) Principiul terțului exclus, fiind absolut echivalent cu principiul contradicției, îndeosebi în formularea lui

ontologică, este inatacabil și atît cît universalitatea lui nu este pusă în joc orice logică formală care ar vrea să treacă peste el nu ține seama de unul din principiile logice. Mai mult încă, din analiza de mai sus, am văzut că principiul terțului exclus poate fi exprimat cu ajutorul principiului contradicției, dar principiul contradicției se află nu numai la originea principiului terțului exclus, ci a tuturor principiilor. În această privință, Aristotel spune clar: „Iată pentru ce toate demonstrațiile se reduc la această ultimă axiomă [principiul contradicției], fiindcă aceasta este, prin natura ei, principiul — ἀρχὴ — tuturor celorlalte axiome"[46].

În acest caz, este imposibil să atenuăm sau să renunțăm la principiul logic al terțiului exclus, sau la alte principii logice, fiindcă ele nu sînt contingente, nici admise convențional, ci sînt, cum zice Aristotel, prin natura lor, principii diverse care au un principiu comun, de unde se trag toate, și care este principiul contradicției.

Cu alte cuvinte, numai formulările diverse ale principiului terțiului exclus au făcut să se creadă că el se aplică numai celor două valori ale propozițiilor, adevărul și falsul. Cum se pleca de la punctul de vedere convenționalist, generalizarea acestei convenții se făcea în mod natural: să acordăm atunci propozițiilor nu numai două valori, ci trei, patru și, în general, n valori.

Dacă plecăm însă de la sensul ontologic al principiului contradicției și, ca urmare, al principiului terțiului exclus, aceste sensuri fiind universale, ele nu sînt limitabile și cîmpul lor de aplicație nu poate fi redus.

Este cu neputință ca cineva să gîndească fără să accepte principiul contradicției; este cu neputință ca cineva să gîndească logic dacă nu acceptă principiul ontologic al terțiului exclus (fiindcă acesta nu are o existență autonomă, ci derivă direct și imediat din principiul contradicției).

Ce s-a întîmplat în logicile polivalente, unde numai principiul terțiului exclus a fost fie redus, fie înlocuit (cu cvartul exclus, cu cvintul exclus etc.)? S-a plecat de

[46] *Metafizica*, IV, 3, 1005 b.

la sensurile deja reduse, ca aplicabilitate, ale acestor principii, și anume acelea care se referă la propoziții adevărate și neadevărate. Punînd problema astfel, s-a coborît sensul principiului terțiului exclus și însăși enunțarea lui nu mai este aceea autentică și originară. Desigur, putem spune că dacă o propoziție poate lua *numai* două valori, adevărul și falsul, atunci orice propoziție este sau adevărată sau falsă. Dar nu acesta este înțelesul originar (care le cuprinde și pe celelalte) al acestui principiu, ci el se enunță astfel: orice propoziție sau este adevărată, sau nu este adevărată. Orice altă formulare a acestui principiu, în raport cu adevărul și falsul unei propoziții, este o abatere de la sensul strict al acestui principiu și în acest caz el poate apărea discutabil. Dar nu numai atît, chiar dacă admitem că există pentru propoziții mai multe valori, să spunem trei, A, F,T, principiul terțiului exclus, exprimat corect, se enunță astfel: orice propoziție sau este adevărată, sau nu este adevărată; orice propoziție sau este falsă, sau nu este falsă; orice propoziție sau este terță, sau nu este terță. Cu alte cuvinte, principiul terțiului exclus funcționează tot timpul dacă avem în vedere forma lui nedegenerată. Dar numai formularea lui degenerată poate să-l facă discutabil și numai ea a putut da loc la discuțiile filozofice care s-au născut în marginea acestei probleme.

Rămîne acum o întrebare: ce înseamnă în cazul acesta valorile atribuite propozițiilor în logicile polivalente? Din examenul nostru rezultă că aceste valori nu pot avea o altă logicitate decît aceea a logicii bivalente; ele sînt valori care nu au nimic universal, deci sînt valori care pot fi găsite în probleme concrete, unde se prezintă mai multe posibilități. De exemplu: o propoziție poate fi corect construită, în care caz, prin convenție, se va spune că are valoarea „adevăr" sau 1; propozițiile care nu au valoarea 1 pot fi împărțite la rîndul lor în mai multe categorii; unele pot fi numite false și vor avea valoarea 2, iar altele vor fi numite fără sens și vor avea valoarea 3 etc.

Împărțirea aceasta poate continua indefinit. Dar prin aceasta principiul terțiului exclus, în formularea lui autentică, este neatins; orice propoziție sau este 1, sau nu este

1; orice propoziție sau este 2, sau nu este 2; orice propoziție sau este 3, sau nu este 3 etc.

Încă o dată vedem că logica nu poate fi construită convențional, fiindcă ea își bazează întreaga ei logicitate pe principiul contradicției (sau pe echivalentul lui, principiul terțiului exclus), care aparține gîndirii și Ființei în mod intrinsec. Sistemele de logică construite convențional, fie bivalente, fie polivalente, nu sînt sisteme de logică, ci sisteme algebrice, care au referință concretă (lingvistică sau de exprimare). Ele sînt construite cu respectul absolut al principiilor logice, în sensul lor universal, ca și oricare știință. Dificultățile care apar atunci cînd este vorba de a interpreta aceste sisteme polivalente ca sisteme de logică au astfel o explicație naturală: se încearcă a se trece de la planul unor relații date, de ordinul exprimării, la planul universalului, și acest lucru nu este niciodată posibil.

Universalul explică datul (în sensul cel mai larg al cuvîntului) și îl face inteligibil, dar nu-l absoarbe. Numai această interpretare a unor sisteme date în termeni universali, adică logici, dă loc la dificultățile pe care le întîmpină sistemele polivalente cînd sînt considerate ca sisteme de logică. În această privință, logica probabilității, a lui Reichenbach, vorbește de la sine: ea absoarbe în întregime logica bivalentă și introduce relații și legi probabilistice, adică nu rămîne pe terenul pur logic, ci aplică logica într-un anume domeniu.

Logicitatea sistemelor polivalente este deci aceea din orice știință, adică logicitatea exprimată de principiul contradicției și de echivalentul lui — principiul terțiului exclus. Numai luînd anumite formulări drept enunțuri ale principiului terțiului exclus, cînd de fapt ele nu exprimau în realitate decît alternative convenționale sau concrete, sau situații plurale, s-a ajuns la ideea că acest principiu (al terțiului exclus) este o simplă convenție și prin urmare modificabil. Ca atare sistemele polivalente nu prezintă mai multe logici alternative, ci sînt aplicații ale aceleași logici în domenii concrete în care există mai multe posibilități, opoziții exclusive, plurale etc. În acest sens ele au o valoare științifică indiscutabilă, căci îmbogățesc, după cum am mai spus, ideile și introduc noi caracterizări

pentru propoziţii, *ceea ce nu se face lărgind logicitatea cuprinsă în logica clasică, ci presupunînd-o.* Sistemele polivalente pot să ne ofere astfel o schemă conceptuală adecvată mai bogată, dar mai puţin obişnuită a unui domeniu oarecare, abstract sau concret, fără ca logica organizării acestui domeniu să fie diferită în sine de logica clasică. Ele vin să întregească cunoştinţele şi viziunea noastră asupra realităţii şi au din acest punct de vedere o reală valoare practică (ceea ce, credem, se desprinde şi din faptul aplicării lor, urmărit de noi în capitolul 9).

În acest sens, „teorema de reprezentare" a lui Gr. C. Moisil este o confirmare pentru punctul nostru de vedere. După cum se ştie, Moisil a demonstrat o teoremă după care „orice propoziţie trivalentă este o pereche de propoziţii bivalente"[47]. El însuşi observă această consecinţă, căci scrie: „Este fără îndoială că teorema de reprezentare îndeamnă către o subsumare a logicilor łukasiewicziene la logica clasică"[48]. Moisil nu aderă însă nici la părerea unor filozofi după care „logica matematică, mai mult încă, logicile matematice neclasice ar fi constituite de *calcule logoide*, care nu corespund de loc, sau numai foarte puţin, logicii tradiţionale"[49].

Noi am arătat că logicile modale şi polivalente conţin principiile logicii clasice, şi prin urmare numai interpretarea lor eronată le poate da o semnificaţie aparentă de „calcule logoide".

În rezumat, putem încheia concluziile noastre astfel:

— logicile modale şi polivalente reprezintă un succes al ştiinţei contemporane;

---

[47] **Gr. C. Moisil,** *Note asupra logicilor nechrysippiene*, studiu publicat prima dată în „Annales scientifiques de l'Université de Jassy", 1, XXVII, 1941, p. 86, apoi în *Încercări vechi şi noi de logică neclasică*, p. 176. În această lucrare, Moisil studiază reprezentarea algebrelor łukasiewicziene trivalente prin familii de perechi de mulţimi.

Această teorie, spune logicianul român, corespunde celei datorate lui M. H. Stone, asupra reprezentării algebrelor booleene prin familii de mulţimi şi celei a lui A. Tarski, asupra reprezentării logicii lui Heyting printr-un spaţiu topologic.

[48] *Încercări vechi şi noi de logică neclasică*, p. 420.

[49] *Ibid.*

— cu ajutorul unor scheme polivalente s-au putut crea structuri matematice pentru domenii concrete aparent contradictorii;

— logicile modale și polivalente nu pot avea decît interpretări concrete; logica formală fiind abstracția ultimă, care atinge universalul, sistemele cu mai multe valori nu pot atinge abstracția maximă și nu pot deci avea o interpretare în domeniul universalului decît în punctele în care ele ar putea să se confunde cu logica clasică și deci care nu reprezintă specific ceea ce este polivalent în ele[50].

---

[50] Concluzia noastră este ilustrată și de încercarea pe care am făcut-o de a explica modalitatea gîndirii „primitive" și a celei chineze prin scheme polivalente (vezi *Istoria logicii*, cap. I și II). După cum este cunoscut gîndirea „primitivă", ca și gîndirea chineză, se desfășoară tot timpul pe imagini concrete, nepărăsind individualul, ci brodînd, pentru a spune așa, în jurul lui, un evantai de note relaționale de ordin sensibil, astfel că elementul cu care lucrează gîndirea devine *o emblemă* cu bază concretă și existențială, nu o esență universală.

Această specificitate a gîndirii „primitive" sau a celei chineze, de a fi în primul rînd o *gîndire concretă*, credem că poate permite ipoteza noastră, după care ea s-ar desfășura pe scheme polivalente.

Simbolurile utilizate in lucrare*

	negaţia la Russell (44), — la Lewis (99), negaţia ciclică a lui Post (304), — interioară [la Bocivar] (340)
$\vee$	suma logică (disjuncţia) la Russell (44), — la Lewis (99), — la Heyting (213), — clasică [la Bocivar] (340)
.	produsul logic (conjuncţia) la Russell (45), — la
$= Df$	Lewis (98) semnul definiţiei la Russell (45)
$\supset$	implicaţia la Russell (46), implicaţia materială la Lewis (109), implicaţia intuiţionistă [la Heyting] (213), implicaţia clasică la Bocivar (340)
$\vdash$	semnul de aserţiune la Russell (47), afirmaţia exterioară la Bocivar (342)
$\equiv$	echivalenţa la Russell (50), echivalenţa materială la Lewis (109), — neclasică [la Bocivar] (341)
$\mid$	incompatibilitatea la Russell (51)
$fx, gx \ldots$	funcţii propoziţionale (75)
$\varphi x, \psi x \ldots$	funcţii propoziţionale variabile (75)
$a, b, c \ldots$	constante individuale (75)
$x, y, z \ldots$	variabile individuale (75)
(x)	cuantificatorul universal (76)
$(\exists x)$	cuantificatorul particular (77)
$\diamond$	„posibilitatea" la Lewis (97,99)
$=$	echivalenţa logică [la Lewis] (99)
$\prec$	implicaţia strictă [la Lewis] (97,99)
o	compatibilitatea la Lewis (115)
$\Box$	„necesitatea" la Lewis (119)
$(\exists p)$	cuantificatorul particular la Lewis (139)

* În paranteză am pus pagina unde simbolul apare definit.

$\rightarrow$	implicaţia riguroasă [la W. Ackermann] (145)
	relaţia de antrenare (148)
	implicaţia intuiţionistă [la Heyting] (237)
	implicaţia alternativă [la Reichenbach] (306,334)
$\Rightarrow$	implicaţia la R. Ackermann (149)
N	negatia la Łukasiewicz (158,174)
M	„posibilitatea" la Łukasiewicz (158,176)
C	implicaţia la Łukasiewicz (161,175)
	implicaţia la Moisil (260)
Σ	cuantificatorul particular la Łukasiewicz (167)
K	conjuncţia logică la Łukasiewicz (168, 180)
Π	cuantificatorul universal la Łukasiewicz (168)
$\alpha(p)$	funcţia propoziţională (168)
A	disjuncţia la Łukasiewicz (180)
E	echivalenţa la Łukasiewicz (182)
D	„dubitativul" la Łukasiewicz (184)
T	functorul lui Słupecki (188)
J	functorul lui Rosser şi Turquette (192)
ϵ	semnul de apartenenţă (208)
$\wedge$	conjuncţia intuiţionistă [la Heyting] (213), — neclasică [la Bocivar] (340)
$\neg$	negaţia intuiţionistă (213), — neclasică [la Bocivar] (341)
$\vdash\vdash$	dublul semn de aserţiune (215)
$\overline{\underline{D}}$	semnul definiţiei la Heyting (215), — la Bocivar (340)
$\supset\subset$	echivalenţa la Heyting (217), — clasică [la Bocivar] (340)
F	implicaţia intuiţionistă (239)
T	conjuncţia intuiţionistă (239)
O	disjuncţia intuiţionistă (239)
$\leftrightarrow$	echivalenţa la Griss (256), concurenţa [la Bocivar] (340)
μ	„posibilitatea" la Moisil (262)
η	„imposibilitatea" la Moisil (261)
ν	„necesitatea" la Moisil (262)
γ	„contingenţa" la Moisil (262)
S	functorul excepţie [la Moisil] (261)
C_L	implicaţia łukasiewiczeană [la Moisil] (271)
$\underset{p}{\rightarrow}$	implicaţia de probabilitate la Reichenbach (281)
$-$	negaţia la Reichenbach (286,287,333)
Nc	„necesitatea" la Reichenbach (292)
P	„posibilitatea" la Reichenbach (292)

Simbolurile utilizate în lucrare

$\mathfrak{Im}$	„imposibilitatea" la Reichenbach (292)
$\lceil w \rceil$	negaţia cantitativă la Reichenbach (304)
$\lvert M \rvert\!-$	semnul aserţiunii *M-tautologiil·r* [la Rescher] (308)
&	produsul în logica mecanicii cuantice a lui P. Février (329)
—	negaţia diametrală în logica mecanicii cuantice a lui H. Reichenbach (333)
$\cup$	suma logică interioară [la Bocivar] (340)
	operaţia de reuniune într-o algebră booleană (367)
$\cap$	produsul logic interior [la Bocivar] (339)
	operaţia de intersecţie într-o algebră booleană (367)
$\downarrow$	non-sensul (341)
Δ	„posibilitatea" la Łukasiewicz (351)
Γ	„necesitatea" la Łukasiewicz (351)
$\overline{\sigma_i}$	negaţiile logicilor łukasiewicziene (365)

Index de nume

A

Ackermann, R., 149, 188, 349, 353
Ackermann, W., 42, 144—148, 358
Alban, 152
Alexandru din Aphrodisias, 16
Anderson, A.R., 145—148
Andronicos din Rhodos, 6
Apostol, P. 357, 377
Aristotel, 6, 14, 15, 20, 21, 22, 26, 29, 33, 34, 90, 157, 160, 161, 172, 202, 203, 207, 370, 371, 378, 379, 381

B

Barcan-Marcus. R., 153
Becker, O., 95, 125, 127, 129, 134—137, 235, 238, 243, 244, 357
Belnap, N, D.Jr., 145—148, 150
Beltrami, E., 28
Bernays, P., 42, 57, 74, 83, 84, 93, 180, 224, 263, 315, 316
Bernoulli, J., 277
Birkhoff, G., 325, 337
Blanché, R., 144, 146, 156, 352
Bocivar, D.A., 200, 315, 338—343, 350
Bohr, N., 327, 330, 336
Bolyai, I., 28
Bompiani, E., 5
Boole, G., 280, 281, 366, 368
Brouwer, L.E.J., 209, 210, 211, 212, 227, 242, 253, 258, 321, 338, 357
Brunschvicg, L., 10, 21, 22, 90
Burali-Forti, C., 87

C

Cantor, G., 87
Carnap, R., 45, 53, 54, 281, 313, 314, 376

Cavaillès, J., 33, 36
Chang, C.C., 201, 346
Chwistek, L., 89
Chrysippos, 14, 16, 17, 18, 26, 203, 204
Church, A., 147, 200, 316, 338
Cicero, 203, 204
Ciucu, G., 277
Corput, van der, 322
Curry, H., 36, 57

D

Dantzig D., van, 257, 322
Dedekind, R., 33
Destouches, J.L., 324
Dugundji, J., 352
Dumitriu, A., 24, 33, 41, 96, 121, 143, 372, 376, 378

E

Einstein, A., 28, 29
Emch, A.F., 143, 146
Engels, F., 372
Errera, A., 251
Euclid, 27, 28, 177, 202
Eudem, 15, 16

F

Fermat, P., 25, 246
Février, P., 251, 254, 315, 326—330, 337
Feyerabend, P., 337
Feys, R., 108, 123, 127, 132, 150, 151, 153, 154
Finetti, B. de, 278, 283
Fisher, R.A., 278
Frege, G., 42, 47, 76, 90, 370
Freudenthal, H., 146, 322

G

Gentzen, G., 213, 233, 264
Gibbs, 283
Gilmore, P.C.G., 254
Glivenko, V., 236
Goblot, E., 22
Gödel, K., 36, 37, 213, 238, 240, 242, 252
Gonseth, F., 183, 206, 207, 329
Griss, G.F.C., 253—257

H

Halldén, S., 152, 153
Heidegger, M., 21, 23
Heisenberg, W., 327, 328, 330, 331, 332, 335
Henle, P., 155
Heraclit, 376
Heyting, A., 208—258, 268, 272, 315, 319, 321, 344, 356, 357, 362, 384
Hilbert, D., 30, 32, 33, 36, 42, 74, 83, 84, 90, 93, 235, 263, 357, 358
Hoo, Tzu-Hua, 189
Husserl, E., 133

I

Iosifescu, M., 288

J

Jeffreys, H., 281, 297
Johansson, I., 245, 251, 252, 344

K

Kaila, 146
Kant, I., 19, 20, 159, 371
Keynes, J.M., 281, 296
Klaus, G., 372
Kleene, S.C., 200, 213, 238
Kolmogorov, A.N., 230, 246—251, 283
Körner, S., 229
Kotarbinski, T., 162, 379
Kreisel, G., 38
Krivine, J.L., 38

L

Ladrière, J., 37
Laerţiu, Diogene, 17
Lambert, H., 31
Langford, C.H., 50, 95, 102, 158, 184, 269, 319
Laplace, 277
Leibniz, G.W., 67, 160
Lemmon, E.J., 153
Lenin, V.I., 373
Łesniewski, S., 162, 169
Lewis, C.I., 50, 95—156, 157, 158, 184, 185, 235, 241, 244, 245, 253, 307, 308, 311, 312, 319, 320, 346, 352, 354
Lobacevski, N.I., 28
Loor, De, 322
Łukasiewicz, J., 14, 16, 26, 80, 157—209, 225, 226, 236, 238—241, 243, 260, 263, 270, 272—275, 312, 319, 320, 326, 327, 333, 345, 348, 351, 352, 354, 357, 361, 363, 364, 368
Lupaşcu, S., 376

M

Mac Coll, H., 98, 150, 157
Margenau, H., 337
McKinsey, J., 101, 125, 213, 214, 244
Mihoc, G., 288
Mises, R. von, 280, 281, 287
Moh Shaw-Kwei, 147, 201, 344, 345
Moisil, Gr.C., 5, 182, 186, 196, 197, 201, 257, 259—275, 365, 368, 384
Mostowski, A., 184, 198, 201, 321
Morgan, A. De, 70, 230, 367

N

Nagel, E., 337
Nelson, J.E., 98
Neumann, J. von, 327, 336
Neyman, J., 278
Nicod, J., 11, 12, 14, 53

O

Ogasawara, T., 263
Onicescu, O., 277, 278, 283, 284, 287

P

Pacius, J., 371
Parry, W.T., 98, 127, 133, 146
Pasch, M., 31
Peano, G., 42, 55, 64, 66, 67
Pearson, E., 278
Petrus Hispanus, 19, 23

Popescu, F., 7
Post, E.L., 101, 198, 199, 200, 304, 318, 353, 355
Prantl, C., 16
Prior, A.N., 135, 153, 185, 189, 253, 351, 356
Putnam, H., 337

R

Ramsey, R., 89
Reichenbach, H., 79, 146, 276 — 314, 315, 326, 338, 355
Rényi, A., 278, 283
Riemann, B., 28
Rescher, N., 307, 308, 311
Robinson, A., 38
Rootselaar, van B., 322
Rose, A., 196, 201
Rosser, J.B., 156, 192, 194—197, 200, 201, 352
Russell, B., 9, 10, 17, 32, 41—97, 103, 112, 113, 141, 142, 154, 171, 173, 176, 188, 198, 208, 214, 215, 228, 235, 237, 317, 320, 338, 342, 344, 377

S

Saccheri, G., 177
Schaff, A., 372
Sextus Empiricus, 17
Shannon, C.E., 343
Sigwart, Ch., 22
Sikorski, R., 367
Skolem, Th., 201, 345
Słupecki, J., 188, 189, 198, 200
Sobocinski, B., 151, 153
Sommerfeld, A., 327
Speranţia, E., 246
Stihi, T., 7
Stone, W., 325, 384

Ş

Şestakov, V.I., 346, 348

T

Tarski, A., 29, 30, 157, 176, 178, 195, 197, 213, 244, 384,
Theodorescu, R., 288
Theophrast, 15, 16
Turquette, A.R., 158, 192, 194, 195, 197, 201

V

Valpola, C., 254
Venn, J., 278
Vredenduin, P.G., 144, 254,

W

Wald, A., 278
Wavre, R., 212
Wajsberg, M., 188, 191, 195, 196, 197, 200, 267, 268
Whitehead, A.N., 9, 17, 32, 41—94, 103, 112, 141, 198, 316, 320
Wittgenstein, L., 13, 50, 52, 90, 91, 372, 375, 378
Wright, G.H., von, 23, 24, 151, 153, 314

Z

Zawirski, Z., 199, 326
Zinoviev, A.A., 201, 354

Index de materii

A

Adaequatio rei et intellectus, 370, 371, 372
Anomalii cauzale, 330, 331, 337
Asociativitate, 56, 63, 100, 264
Axioma lui Brouwer, 136, 216, 222, 228, 245, 253

C

Calcul minimal, 245, 251—253
Cerc vicios, 100, 207; (principiul —), 88
Complementaritate (principiul —), 335, 336
Completitudinea (suficienţa) axiomelor, 40, 122, 195, 321
Comutativitatea, 56, 60, 65, 69, 72, 100, 104, 264
Condiţia verticală a adevărului, 372
Condiţia orizontală a adevărului, 372
Consistenţa, 318, 319, 320
Construcţie matematică, 229, 254, 258
Contradicţie, 89, 183, 188, 257, 318, 336
Convenţionalism logic, 376, 377
Cuantificarea (în calculul cu funcţii) 76, 78; — (în calculul propoziţional), 139, 167, 168, 197

D

Deducţie (logică), 13, 14, 27, 29, 30, 31, 32, 113, 140, 141, 142; — (logistică), 140
Definiendum, 45, 79
Definiens, 45, 79
Definiţia, 45, 79, 215
Dictum, 19
Distributivitatea, 69, 264, 269, 325

Domeniu (de acțiune al unui cuantificator), 78; — (al unei funcții propoziționale), 76, 92, 93, 232, 234, 343
Dubla negație (principiul —, legea —, regula —), 62, 68, 89, 106, 182, 228, 229, 232, 237, 250, 272

E

Extensiune, 76, 96, 143, 156
Extensionalism, 90

F

Falsul absolut, 328, 337
Formă normală, 358; — (conjunctivă), 149; — (disjunctivă), 149
Formulă, 46, 57, 78
Functor, 162

G

Geometrii necuclidiene, 28, 31, 200
Grad (de confirmare), 281; — (de cuplare), 289; — (al așteptării), 295

I

Independența propozițiilor, 114, 138, 139
Individ, 74, 88, 92, 93, 232
Inducție, 314
Intensiune, 96, 97, 98, 155, 156
Interpretare, 37, 41, 125, 184, 188, 234, 242, 243, 244, 245, 317, 318, 324, 330, 350, 352, 353, 356, 358, 368, 375; — (logică a probabilității), 280, 281; — (statistică, prin frecvență, a probabilității), 279, 282, 285, 295, 296
Izomorfie, 38, 297

L

Legea antilogismului, 107
Legea lui Peirce, 236
Legile lui De Morgan, 78, 230, 273
Limba-obiect, 38
Logica (complementarității), 327—330; — (cu o infinitate de valori), 25, 190, 195, 196, 199, 201, 285, 345, 356; — (inductivă), 314; — (L_3), 173—176, 182—184; — (L_m), 189—198; — (L_{3E}), 327; — (L_{3Q}), 330; — (T), 359; — (matematicii intuiționiste fără negație), 251, 253—257; — (modală simetrică generală), 273; — (modală simetrică normală), 274; — (neohrisippiană), 26, 202, 365; — (ponderei), 297; — (pozitivă), 263; — (simbolică), 11, 281; — (Standard), 349; — (știință formală), 9, 11, 12, 44, 134, 205, 246; — (știință a științelor), 6

M

Matrice, 174; — (normală), 200, 355
Metalimbă, 38, 333
Metoda (axiomatică), 178; — (matricială sau a matricilor de adevăr), 178, 190
Modalitatea *(modus* și *dictum)* 19; — (afirmativă și negativă), 132; — (complexă ireductibilă), 125—127, 153, 154; — (în sens larg), 23, 24; — (în sens relativ și absolut), 119, 120; — (proprie și improprie), 131; (gradul unei),— 134
Model, 37, 122, 123, 320, 321
Moduri (aletice), 23; — (deontice), 24; — (epistemice), 23; — (existențiale), 24
Modus ponens (regula —, sau de inferență, sau de despărțire), 16, 48, 58, 83, 103, 162, 191, 198, 214, 239, 240, 263, 302, 317
Modus tollens, 16

N

Necesarul (la Aristotel), 21, 203; — (în sistemele implicației stricte și cele înrudite cu acestea), 119, 133, 137, 141—143, 146, 150, 152, 155; — (la Łukasiewicz), 159, 160, 177, 191, 204, 205; — (într-o logică modală oarecare), 351; — (la Moisil), 275; — (la Reichenbach), 292
Nedeterminatul, 331
Negația (cuantificatorilor), 85; — (în intuiționism), 210, 211, 226, 242; — (în logicile polivalente), 354, 358—365; — (sceptică, sterilă), 372, 373
Nonsensul (ca valoare de adevăr), 339

O

Operația de selecție, 288, 291, 297

P

Paradoxul (în sistemele polivalente), 344, 345; — (în teoria mulțimilor), 25, 208, 209; — („predicabil-impredicabil"), 25, 87, 88, 342, 343, 344
Paradoxele (implicației materiale), 114, 125, 145, 182; — (implicației stricte), 142, 143, 145, 154
Ponderea, 295, 307
Posibilul (la Aristotel), 21, 202, 203; — (în sistemele implicației stricte), 118, 119, 120, 134, 152, 155; — (la Łukasiewicz), 158 — 161, 165, 173, 174, 176—181; — (într-o logică modală oarecare), 351; — (la Reichenbach), 292

Predicat, 74, 87, 88, 92, 93
Principia Mathematica (Principii), 9, 17, 42—73, 74, 88, 89, 91, 97, 103, 110, 111, 112, 138, 141, 172, 177, 199, 224, 316, 356
Principiul (contradicției), 66, 89, 109, 196, 251, 353, 376, 377, 378, 380, 381, 383; — (logic, ontologic, psihologic al contradicției), 379; — (de determinare), 271; — (dublei contingențe), 275; — (identității), 104; — *(reductio ad absurdum)*, 59, 62, 211, 356; — (silogismului), 60, 89, 100, 107, 182, 187, 217, 246, 258; — (terțiului exclus), 61, 89, 173, 183, 188, 196, 202, 203, 204, 209, 210, 211, 212, 213, 222, 223—230, 231, 242, 250, 266, 322, 358—383; — (quartului exclus), 183, 186, 269, 359, 362, 364; — (m + 1-lui exclus), 196; — (transpoziției sau contrapoziției), 62, 66, 68; T-principii (teoreme), 123, 124
Probabilitate (absolută), 283—286; — (relativă sau condiționată), 283
Produs logic, 45, 65, 69, 98
Propoziții (atomice sau simple), 10, 11, 44; — (compozabile), 382; — (incompozabile), 328; — (moleculare sau compuse), 10, 11, 44; — (sintetice), 343
Protothetică, 169
Punctul (ca semn de despărțire a formulelor), 46, 47 216

R

Regula (de adjuncție sau operația de adjuncție), 103, 126, 215, 216, 320; — (de alcătuire a formulelor în calculul propozițional), 57; — (de alcătuire a formulelor în calculul cu funcții), 77—79; — (de dualitate, 128; — (de introducere a cuantificatorilor), 80, 169; — (înlocuirii expresiilor echivalente), 301 302, 310
Relativismul logic, 376
Relația (de antrenare — *entailement*), 146, 147, 148, 150; — (de deductibilitate, de inferență), 94, 115, 140—150, 154; — (de probabilitate), 283
Relații de incertitudine, 330, 333
Reziduația, 265, 266, 273, 276

S

Scheme deductive, 264, 272
Silogism (categoric), 15; — (ipotetic), 15, 16, 20, 163
Sistemul (1, al lui Lewis: S1), 102; — (S1°), 108; — (S2), 124, 243; — (S3), 102, 127, 243, 244; — (S4), 129, 244, 245; — (S5), 136, 245; — (S6), 152; — (S7), 152; — (S8), 152; — (S2°), 153; — (S3°), 153; — (T, al lui Feys-von Wright), 151; — (S4°), 153; — (normal), 355

Sofisme (de modalitate), 147; — (de potrivire), 147
Specie, 232, 255
Substituţia (regula, metoda, operaţia de substituţie în calculul cu funcţii), 51—83, 197; — (în calculul propoziţional intuiţionist), 215, 239, 240; — (în calculul propoziţional al lui Lewis), 102; — (în calculul propoziţional al lui Łukasiewicz), 162, 163; — (în calculul propoziţional al lui Moisil), 263; — (la Reichenbach), 301, 306; — (în calculul propoziţional bivalent), 58
Suma logică, 44, 59, 69

T

Tautologie (în calculul cu funcţii, sau formulă universal validă), 92, 287; — (în logica probabilităţilor), 298; — (în calculul propoziţional al lui Bocivar), 341, 343, 344; — (în calculul propoziţional intuiţionist), 224, 226, 228, 237; — (în calculul propoziţional al lui Lewis), 320; — (în calculul propoziţional al lui Łukasiewicz), 178, 179, 183, 195; — (în calculul propoziţional bivalent), 91, 188, 303, 316, 355, 356; Mtautologie, 308—310
Teorema (lui Stone), 325, 384; — (de reprezentare), 383, 384
Teoria (consecinţelor), 18, 121; — (corpusculară), 326, 335; — (ondulatorie), 326, 335; — (relativităţii), 29; — (ramificată a tipurilor), 89
Teză, 162

V

Valoare de adevăr, 13, 43, 91, 94, 96, 173, 198, 202, 226, 316
Variabilă (legată), 77, 81; — (liberă), 77, 82; — (propoziţională), 43, 55, 57, 77, 82
Viitor contingent, 202, 207

Bibliografie

Bibliografia care urmează nu are pretenţia să fie exhaustivă. Ea a fost alcătuită în vederea acelor cititori care ar voi să aprofundeze problemele puse în lucrarea de faţă. Pentru o mai bună înţelegere a acestei bibliografii am indicat mai întîi lucrările cu caracter general istoric şi apoi am grupat lucrările în funcţie de conţinutul lor, pe capitolele care formează cuprinsul acestei cărţi.

Lucrări istorice

Bochenski, J. M., *Formale Logik* (Freiburg-München, ediţia a II-a, 1962). În special § 49.

Dumitriu, A., *Istoria logicii* (Bucureşti, 1969). În special cap. XLV.

Kneale, W. şi M., *The development of logic* (Oxford, 1962). În special cap. IX, 4, 5, şi XI, 3.

Kotarbinski, T., *Leçons sur l'histoire de la logique* (Paris, 1964).

La capitolul 1

Blanché, R., *Raison et discours* (Paris, 1967). Pentru studiul modalităţii a se vedea în special cap. VI.

Brunschvicg, L., *La modalité du jugement* (Paris, 1897).

Poirier, R., *Logique et modalité* (Paris, 1952).

Prior, A. N., *Formal Logic* (Oxford, ediţia a II-a, 1962). Partea a III-a a acestei lucrări reprezintă o foarte bună introducere în logicile modale şi polivalente.

von Wright, G.H., *An Essay in Modal Logic* (Amsterdam, 1951), una dintre cele mai importante lucrări moderne de logică modală.

La capitolul 2

Blanché, R., *Axiomatique* (Paris, 1959).

Cavaillès, J., *Axiomatique et système formel* (Paris, 1938).

Dumitriu, A., *La structure axiomatique de la science moderne*, „Scientia", 1970.

Ladrière, J., *Les limitations internes des formalismes* (Louvain-Paris, 1957).

Porte, J., *Recherches sur la théorie générale des systèmes formels et sur les systèmes connectifs* (Louvain-Paris, 1965).

La capitolul 3[1]

Carnap, R., *Einführung in die Symbolische Logik* (Viena, ediţia a II-a, 1960).

Church, A., *Introduction to mathematical logic* (Princeton, 1956).

Hilbert, D. şi Ackermann, W., *Grundzüge der theoretischen Logik* (Berlin, ediţia I, 1928; ediţia a V-a, 1967).

Hilbert, D. şi Bernays, P., *Grundlagen der Mathematik* (Berlin, ediţia I: vol. I, 1934; vol. II, 1938).

Kleene, S. C., *Introduction to metamathematics* (Amsterdam — Groningen — New York, 1952).

[1] Toate lucrările date la capitolul 3 sînt introduceri sau tratate importante de logică bivalentă.

Whitehead, A. N. şi Russell, B., *Principia Mathematica* (Cambridge, ediţia I: vol. I, 1910; vol. II, 1912; vol. III, 1913; ediţia a II-a: vol. I în 1925, celelalte în 1927).

* * *

În limba română cititorul poate consulta:

Dumitriu, A., *Logica Nouă* (Bucureşti, 1940).

Enescu, Gh., *Logica simbolică* (Editura ştiinţifică, 1971).

Mihăilescu, E., *Sisteme şi forme normale în calculul propoziţional bivalent* (Editura Academiei, 1966).

Novikov, P. S., *Introducere în logica matematică* (Editura ştiinţifică, 1963, trad. din l. rusă).

Tîrnoveanu, M., *Elemente de logică matematică* (Editura didactică şi pedagogică, 1966).

La capitolul 4

Ackermann, W., *Begründung einer strengen Implikation*, „Journal of Symbolic Logic", XXI (1956), pp. 113—128.

Ackermann, W., *Über die Beziehung zwischen strikter und strenger Implikation*, „Dialectica", Bd. 12 (1958), S. 213—222.

Anderson, A. R. şi Belnap, N. D. Jr., *The pure calculus of entailment*, „Journ. of Symb. Logic", XXVII (1960), pp. 19—52.

Barcan, R. C., *A functional calculus of first order based on strict implication*, „Journ. of Symb. Logic", XI (1946), pp. 1—16. O încercare de a dezvolta calculul cu funcţii pe baza sistemelor implicaţiei stricte.

Belnap, N. D. Jr., *A formal analysis of entailment*, „Technical Report" nr. 7, Office of naval research, Contract No SAR Nonr - 609 (16), New Haven, 1956.

Feys, R., *Les logiques nouvelles des modalités*, „Revue Néoscolastique de philosophie", XL

(1937), pp. 517—533 și XLI (1938), pp. 217—252.

Feys, R., *Modal logics* (Edited with some complements by J. Dopp, Louvain-Paris, 1965). Cartea conține o expunere sistematică și dezvoltată a cercetărilor avînd ca bază sistemele modale lewisiene S1—S5. În ea cititorul poate găsi, de asemenea, o bibliografie cuprinzătoare a lucrărilor din acest domeniu.

Hugues, G. E. și Cresswell, M. J., *Introduction to Modal Logic* (Londra, 1968).

Kripke, S. A., *A completeness theorem in modal logic*, „Journ. of Symb. Logic" XXII (1967), pp. 176—186.
Lucrarea reprezintă un punct de vedere comun între sistemele numite modale (în speță sistemul 5 al lui Lewis) și cele polivalente — în care tezele sînt tautologii calculate pe baza unor matrice de adevăr. Numai că, în interpretarea lui Kripke, unei formule din S5 îi corespunde nu o matrice de adevăr, ci mai multe.

Lemmon, E. J., *New foundations for Lewis modal systems*, „Journ. of Symb. Logic", XXII (1957), pp. 176—186.

Lewis, C. I. și Langford, C. H., *Symbolic Logic* (New York, ediția I 1932, ediția a II-a 1959). În capitolul VI al acestei lucrări, precum și în appendixele II și III (ed. a II-a), Lewis expune sistemele implicației stricte.

Prior, A. N., *Many valued and modal systems: an intuitive approach*, „Philosophical review", LX (1955), pp. 626—630.

Prior, A. N., *Time and modality* (Oxford, 1957). În special capitolele II, III și Appendix B.

Salomaa, A., *On many valued systems of logic*, „Ajatus", XXII (1959), pp. 115—159.

Smiley, T. J., *Entailment and deducibility*, „Proceedings of the aristotelian society", 1958—1959, pp. 233—254.

Sobocinski, B., *Note on a modal system of Feys-von Wright*, „The journal of computing systems", I (1953), pp. 171—178.

La capitolul 5

Ackermann, R., *Introduction to many valued Logics* (London — New York, 1967).
O introducere de mici proporţii în studiul logicilor polivalente, în special în logicile L_m ale lui Łukasiewicz.

Hay, L. S., *Axiomatization of the infinite-valued predicate calculus*, „Journ. of Symb. Logic", XXVIII (1963), pp. 77—86.

Łukasiewicz, J., *Asupra logicii trivalente*, „Ruch Filozoficzny", V (1920), pp. 160—171.

Łukasiewicz, J., *Philosophische Bemerkungen zur mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls*, „Comptes rendus des séances de la société des sciences et des lettres de Varsovie", Classe III, 23 (1930), pp. 51—77. Articolul a apărut tradus în volumul „Materialismul dialectic şi ştiinţele moderne", XI.

Łukasiewicz, J., *Die Logik und das Grundlagenproblem*, „Les entretiens de Zürich sur les fondements et la méthode des sciences mathematiques", Zürich, 1941, pp. 88—100.

Łukasiewicz, J. şi Tarski, A., *Unterschungen über den Aussagenkalkül*, „Comptes rendus des séances de la société des sciences et des lettres de Varsovie", Classe III, 23 (1930), pp. 30—50.

Meredith, C. A., *The dependence of an axiom of Łukasiewicz*, „Transactions of the american mathema-

tical society", LXXXVII (1958), p. 54.

Mostowski, A., *Axiomatizability of some many valued predicate calculi*, „Fundamenta mathematicae", L (1961), pp. 165—190.

Post, E. L., *Introduction to a general theory of elementary propositions*, „American journal of mathematics", XL (1921), pp. 163—183.

Rose, A., *Completeness of Łukasiewicz-Tarski propositional calculus*, „Mathematische annalen", CXXII (1950), pp. 206—298.

Rose, A., *Axiom systems for 3-valued logic*, „The journal of the London mathematical society", XXVI (1951), pp. 50—58.

Rose, A. şi Rosser, J. B., *Fragments of many valued statementcalculi*, „Transactions of the american mathematical society", LXXX (1958), pp. 1—53.

Rosser, J. B. şi Turquette, A. R., *Many-valued logics* (Amsterdam, 1952). Una dintre cele mai importante lucrări în domeniul logicilor polivalente.

Turquette, A. R., *Independent axioms for infinite valued logic*, „Journ. of. Symb. Logic", XXVIII (1963), pp. 217—221.

La capitolul 6

Brouwer, L. E. J., *Historical background, principles and methods of intuitionism* „South-african journal of science", XLIX, pp. 139—146.

Gödel, K., *Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie*, „Ergebnisse eines math. Kolloquiums", B. 4 (1933), S. 34—38.

Gödel, K., *Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls*, „Ergebnisse eines math. Kolloquiums", B. 4 (1933), S. 39—40.

Heyting, A., *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*, „Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften"

(Physikalische - mathematische Klasse), 1930, pp. 42—56.

Heyting, A., *Les fondements des mathématiques, Intuitionnisme. Théorie de la démonstration* (Louvain-Paris, 1955).

Lucrarea cuprinde și un bogat material informativ cu privire la cercetările legate în vreun fel de logica intuiționistă.

Heyting, A., *Intuitionism — An Introduction* (Amsterdam, ediția I 1956; ediția a II-a 1966). O lucrare de largă inițiere în matematica și logica intuiționistă. Ea este însoțită de o bibliografie aproape exhaustivă asupra acestui domeniu de cercetări.

Johansson, I., *Der Minimalkalkül ein reduzierter intuitionistischer Formalismus*, „Compositio mathematica", IV (1936), pp. 119—136.

Prawitz, D., *An interpretation of intuitionistic predicate logic in modal logic*. „Contributions to mathematical logic. Proceedings of the logic colloquium Hannover 1966.

Schütte, K., *Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik* (Berlin — Heidelberg — New York, 1968).

La capitolul 7

Moisil, Gr. C., *Sur la théorie classique de la modalité des jugements*, „Bull. math. de la soc. roumaine des sc." (București, t. XI, 1938, p. 235).

Moisil, Gr. C., *Logique modale*, „Disquisitiones math. et phys." (București, t. II, 1942).

Moisil, Gr. C., *Remarques sur la logique du concept*, „Analele Acad. române — memoriile secț. șt.", Seria III, t. XVI (1940—41), p. 975.

La capitolul 8

Carnap, R., *Logical foundations of probability* (Chicago, ediția a II-a, 1960). Un tratat important asupra probabilității din punct de vedere logic.

Carnap, R., *The Continuum of inductive methods* (Chicago, 1952).

de Finetti, B., *Teoria della Probabilita*, 2 vol. (Torino, 1970).

Kemeny, J. C., *A logical measure function*, „Journ. of Symb. Logic", XVIII (1953), pp. 290—308.

Onicescu, O., *Principiile teoriei probabilităților* (București, 1969).

Reichenbach, H., *The theory of probability* (Berkeley—Los Angeles, 1949).

Ruzavin, G. I., *Probabilitatea logică și inferențele inductive*, tradus din limba rusă în volumul *Materialismul dialectic și științele moderne*, vol. XIII (București, 1970).

La capitolul 9

Birkhoff, G. și von Neumann, J., *The logic of quantum mechanics*, „Annals of mathematics", XXXII (1936), pp. 823—843.

Destouches — Février, P., *La structure des théories physiques* (Paris, 1951).

Feyerabend, P., *Reichenbach's interpretation of quantum mechanics*, „Philosophical studies", 9 (1958), pp. 49—59.

Nagel, E., *Professor Reichenbach on quantum mechanics: a rejoinder*, „The journal of philosophy", XL (1946), pp. 247—250.

Putnam, H., *Three valued logic*, „Philosophical studies", 8 (1957), pp. 73—80.

Reichenbach, H., *Philosophical foundations of quantum mechanics* (Berkeley — Los Angeles, 1944).

Moisil, Gr. C., *Funcționarea reală a schemelor cu contacte și relee*, I (București, 1963).

La capitolul 10

Aristotel, *Organon*, vol. I—IV (Bucureşti, 1957—1963).

Dumitriu, A., *Logica polivalentă* (Bucureşti, 1943).

Engels, F., *Anti-Dühring*, Editura P.M.R., Bucureşti, 1952.

Lenin, V. I., *Caiete filozofice*, Editura de stat pentru literatura politică, Bucureşti, 1956

Łukasiewicz, J., *A system of modal logic*, „Journal of computing systems", vol. I (1953), nr. 3, pp. 111—140.

Lupaşcu, S., *Logique et contradiction* (Paris, 1947).

Rescher, N., *Topics in philosophical Logic* (Dordrecht, 1968). În special cap. VI dedicat logicilor polivalente.

Rescher, N., *Many-valued logic* (New York, 1969).

Zinoviev, A. A., *Philosophical problems of many-valued logic* (Dordrecht-Holland, 1963).

Tabla de materii

Pag.

Prefaţă 5

1 *Introducere*

Propoziţia şi modalitatea ei

1.1. Calculul propoziţional 9
1.2. Valoarea propoziţiilor 11
1.3. Originile calculului propoziţional 14
1.4. Modalitatea propoziţiilor 18
1.5. Semnificaţia modalităţii 21
1.6. Ce este logica polivalentă? 24
1.7. Logici modale şi polivalente 26

2 *Sisteme formale*

2.1. Metoda axiomatică 27
2.2. Formalizarea teoriilor deductive 30
2.3. Structura axiomatică a unei ştiinţe 33
2.4. Construcţia unui sistem formal 36
2.5. Condiţiile grupului axiomatic 38
2.5.1. Necontradicţia axiomelor 39
2.5.2. Independenţa axiomelor 39
2.5.3. Suficienţa axiomelor 40
2.6. Construcţia logicii ca sistem formal 41

3 *Logica bivalentă*

A. *Calculul propoziţional* 42
3.1. Principia Mathematica 42
3.2. Idei primitive 43
3.3. Funcţii de adevăr 48
3.4. Propoziţii primitive 55
3.5. Consecinţele imediate ale propoziţiilor primitive.... 57
3.6. Produsul logic a două propoziţii..... 65
3.7. Echivalenţa 67
3.8. Propoziţii diverse 72
B. *Calculul cu funcţii*..... 74
3.9. Funcţii propoziţionale 74
3.10. Idei primitive 77
3.11. Propoziţii primitive 79
3.12. Consecinţele propoziţiilor primitive 81
3.13. Teoria tipurilor 86
3.14. Consideraţii generale 89

4 *Logica implicaţiei stricte*

4.1. Implicaţia strictă 95
4.2. Idei primitive (nedefinite)..... 98
4.3. Definiţii 99
4.4. Propoziţii primitive 100
4.5. Teoreme 102
4.6. Implicaţia materială 109
4.7. Relaţia de compatibilitate 113
4.8. Funcţii modale 118
4.9. Completarea sistemului 1. Sistemul 2..... 122
4.10. Modalităţi complexe 125
4.11. Reducerea modalităţilor la 14. Sistemul 4..... 128
4.12. Reducerea modalităţilor la 6. Sistemul 5..... 134
4.13. Un postulat de existenţă 137
4.14. Implicaţie şi deductibilitate..... 140

4.15. Completări aduse sistemelor implicației stricte. Alte sisteme modale 150
4.16. Considerații generale 154

5 *Logicile lui Łukasiewicz*

5.1. Logica modală a lui Łukasiewicz 157
5.2. Ideile primitive 158
5.3. Propoziții modale primitive 159
5.4. Consecințele primelor două propoziții modale 161
5.5. Consecințele celei de-a treia propoziții modale primitive 167
5.6. Incompatibilitatea propozițiilor modale primitive în calculul bivalent 171
5.7. Logica trivalentă 173
5.8. Definiția noțiunii de posibilitate 176
5.9. Consecințele definiției conceptului de posibilitate .. 178
5.10. Dezvoltarea logicii trivalente 182
5.11. Modalitățile logicii trivalente 184
5.12. Generalizarea logicii trivalente: logicile L_m 189
5.13. Alte cercetări 198
5.14. Considerații generale 202

6 *Logica intuiționistă*

6.1. Intuiționismul lui Brouwer 208
6.2. Formalizarea logicii intuiționiste 212
6.3. Reguli de operații 214
6.4. Constantele $.$, $:$, $:.$, $::$, $\supset$, $\wedge$, $\supset\subset$, $(,)$, $\overline{\overline{D}}$ 216
6.5. Constanta $\vee$ 219
6.6. Constanta $\neg$ 221
6.7. Axiomele intuiționiste și principiul terțiului exclus 223
6.8. Observații asupra calculului propozițional intuiționist 230
6.9. Calculul cu funcții intuiționist 231
6.10. Compararea logicii intuiționiste cu logica bivalentă 234
6.11. Compararea logicii intuiționiste cu cea a lui Lewis 243
6.12. Logica problemelor a lui Kolmogorov 246
6.13. Alte cercetări ale școlii intuiționiste 251
6.14. Considerații generale 257

7 *Logica modală*

7.1. Cercetările lui Gr. C. Moisil 259

7.2. Idei primitive; definiţii; functorul *S* 260
7.3. Logica modală generală 262
7.4. Imposibilitatea şi contingenţa în logica modală generală 265
7.5. Necesitatea şi posibilitatea..... 266
7.6. Logica modală specială..... 268
7.7. Logicile modale simetrice 272
7.8. Consideraţii generale 274

8 *Logica probabilităţilor*

8.1. Noţiunea de probabilitate..... 276
8.2. Constituirea logicii probabilităţilor 285
8.3. Logica modalităţilor 291
8.4. Logica ponderii. Noţiuni preliminare..... 294
8.5. Tautologiile logicii probabilităţilor. Deducerea tautologiilor din prima categorie..... 297
8.6. Tautologiile din a doua categorie. Negaţia cantitativă 303
8.7. Sistemul 5 al lui Lewis, din punctul de vedere al calculului probabilităţilor 307
8.8. Consideraţii generale 312

9 *Aplicaţiile logicilor polivalente*

9.1. Introducere 315
9.2. Aplicarea logicilor polivalente la studiul sistemelor formale 315
9.3. Aplicarea logicilor polivalente în matematică..... 321
9.4. Aplicaţiile logicilor polivalente în mecanica cuantică 324
9.4.1. Logicile polivalente construite de Paulette Février 326
9.4.2. Logica mecanicii cuantice a lui Hans Reichenbach 330
9.5. Logicile polivalente şi paradoxele logice..... 338
9.6. Aplicarea logicilor cu mai multe valori în studiul schemelor cu contacte şi relee 346

10 *Concluzii finale*

10.1. Distincţia dintre logicile modale şi logicile polivalente 349

10.2. Raportul dintre logica bivalentă și logicile polivalente 353
10.3. Funcția negației 358
10.4. Valori de adevăr 365
10.4.1. Algebre booleene și łukasiewicziene..... 366
10.5. Adevăr și fals 368
10.6. Logicitatea sistemelor polivalente 375
Simbolurile utilizate în lucrare..... 387
Index de nume..... 391
Index de materii 395
Bibliografie 401